



Utiliser les notations d'événements et de probabilités

Exercice n°1 : Une tombola propose des lots dont la valeur peut être égale à 5, 15, 50, 150 ou 500 €. Les probabilités d'obtention de chacun des lots sont égales.

On modélise la situation avec une variable aléatoire X associant la valeur du lot à chaque issue du tirage.

1. Décrire par une phrase les événements $\{X = 15\}$ et $\{X \leq 50\}$.
2. Que vaut $p(X \leq 50)$?
3. Comment peut-on noter la probabilité de gagner un lot d'au moins 150 € ? Calculer cette probabilité.
4. Traduire par une phrase l'événement $\{X > 500\}$ et donner sa probabilité.

Exercice n°2 : On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	-10	-3	0	4	12
$p(X = x_i)$	0,15	0,25	0,2	...	0,1

1. Que vaut $p(X = 4)$?
2. Calculer $p(X \leq 0)$.
3. Calculer $p(X > -3)$.
4. Calculer $p(-3 \leq X < 12)$.

Exercice n°3 : Une entreprise fabrique des ampoules LED. Elles sont conditionnées en cartons de 250 ampoules.

On considère la variable aléatoire Y associant le nombre d'ampoules défectueuses à un carton de 250 ampoules.

1. Décrire par une phrase :
 - a) l'événement $\{Y = 12\}$
 - b) l'événement $\{Y < 3\}$
 - c) l'événement $\{Y \geq 20\}$
2. Que signifient $p(Y > 5)$ et $p(Y = 0)$?
3. Quelles sont les valeurs possibles prises par Y ?
4. Écrire à l'aide d'une notation la probabilité que le carton contienne entre 4 et 10 ampoules défectueuses (bornes comprises).

Exercice n°4 : À l'issue d'une chaîne de fabrication de tablettes numériques, on recherche deux types de défauts : les défauts d'écran et les défauts de batterie.

Une étude a permis de relever les résultats suivants sur un échantillon de 2 000 tablettes :

	Défaut de batterie	Pas de défaut de batterie	Total
Défaut d'écran	12	48	60
Pas de défaut d'écran	28	1 912	1 940
Total	40	1 960	2 000

À réparer, un défaut de batterie coûte 20 € par tablette et un défaut d'écran coûte 45 € par tablette. X est la variable aléatoire donnant le coût de réparation d'une tablette avant sa mise sur le marché.

1. Quelles valeurs peut prendre X ?
2. Décrire par une phrase l'événement $\{X \leq 45\}$.
3. Que vaut $p(X = 20)$?
4. Donner la loi de probabilité de X .

Exercice n°5 : Une variable aléatoire X peut prendre les valeurs $-250; -50; 0; 75; 400$ et $1\,200$.

Définir par une phrase et donner les issues possibles (c'est-à-dire les valeurs de X concernées) pour chacun des événements suivants :

- $\{X = 75\}$
- $\{X = 100\}$
- $\{X > 0\}$
- $\{X > 400\}$
- $\{X \geq 400\}$
- $\{X \leq -50\}$
- $\{-50 < X \leq 400\}$

Exercice n°6 : On lance 20 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

On note Z la variable aléatoire donnant le nombre de « Pile » obtenus sur les 20 lancers.

- Quelles valeurs peut prendre Z ?
- Utiliser une notation pour écrire les probabilités des événements suivants :
 - On obtient exactement huit fois « Pile ».
 - On obtient au moins une fois « Pile ».
 - On obtient au plus six fois « Pile ».
 - On obtient plus de quinze fois « Pile ».
 - On n'obtient jamais « Pile ».
 - On obtient entre 8 et 12 fois « Pile », bornes comprises.
- Exprimer à l'aide de Z la variable aléatoire donnant le nombre de « Face » obtenus.

Exercice n°7 : La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	-4	-1	0	3	6	9
$p(X = x_i)$	0,08	0,22	0,3	0,17	0,13	0,10

Déterminer les probabilités suivantes :

- $p(X = 3)$
- $p(X \leq 3)$
- $p(X > 3)$
- $p(X \geq 0)$
- $p(X < 0)$
- $p(-1 < X < 9)$
- $p(X = 5)$
- $p(X \leq 9)$

Exercice n°8 : Une variable aléatoire X prend des valeurs entières entre 0 et 80.

- Quel est l'événement contraire de l'événement $\{X > 12\}$?
- Sachant que $p(X > 9) = 0,64$, déterminer $p(X \leq 9)$.
- Sachant que $p(X = 0) = 0,05$, quelle est la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur supérieure ou égale à 1 ?
- On sait de plus que $p(X \leq 20) = 0,78$. Déterminer $p(10 \leq X \leq 20)$.
- Quelle est la valeur de $p(X \leq 80)$? Et celle de $p(X > 80)$?

Correction

Exercice n°1 : Une tombola propose des lots dont la valeur peut être égale à 5, 15, 50, 150 ou 500 €. Les probabilités d'obtention de chacun des lots sont égales.
On modélise la situation avec une variable aléatoire X associant la valeur du lot à chaque issue du tirage.

1. Décrire par une phrase les événements $\{X = 15\}$ et $\{X \leq 50\}$.

L'événement $\{X = 15\}$ se traduit par : « le lot gagné vaut exactement 15 € ».

L'événement $\{X \leq 50\}$ se traduit par : « le lot gagné vaut au plus 50 € », c'est-à-dire que le lot gagné vaut 5, 15 ou 50 €.

2. Que vaut $p(X \leq 50)$?

Il y a 5 valeurs possibles, toutes équiprobables, donc chaque valeur a pour probabilité $\frac{1}{5} = 0,2$.

L'événement $\{X \leq 50\}$ est la réunion des trois événements incompatibles $\{X = 5\}$, $\{X = 15\}$ et $\{X = 50\}$:

$$p(X \leq 50) = p(X = 5) + p(X = 15) + p(X = 50) = 0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,6$$

3. Comment peut-on noter la probabilité de gagner un lot d'au moins 150 € ? Calculer cette probabilité.

« Gagner un lot d'au moins 150 € » se note $p(X \geq 150)$.

$$p(X \geq 150) = p(X = 150) + p(X = 500) = 0,2 + 0,2 = 0,4$$

Remarque : on pouvait aussi utiliser l'événement contraire : $p(X \geq 150) = 1 - p(X \leq 50) = 1 - 0,6 = 0,4$.

4. Traduire par une phrase l'événement $\{X > 500\}$ et donner sa probabilité.

L'événement $\{X > 500\}$ signifie « le lot gagné vaut strictement plus de 500 € ». Comme 500 est la plus grande valeur possible, cet événement est **impossible** : $p(X > 500) = 0$.

Exercice n°2 : On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	-10	-3	0	4	12
$p(X = x_i)$	0,15	0,25	0,2	...	0,1

1. Que vaut $p(X = 4)$?

La somme des probabilités d'une loi de probabilité vaut toujours 1 :

$$0,15 + 0,25 + 0,2 + p(X = 4) + 0,1 = 1$$

$$0,7 + p(X = 4) = 1$$

$$p(X = 4) = 0,3$$

2. Calculer $p(X \leq 0)$.

$\{X \leq 0\}$ correspond aux valeurs -10, -3 et 0 : $p(X \leq 0) = 0,15 + 0,25 + 0,2 = 0,6$

3. Calculer $p(X > -3)$.

$\{X > -3\}$ correspond aux valeurs 0, 4 et 12 : $p(X > -3) = 0,2 + 0,3 + 0,1 = 0,6$

4. Calculer $p(-3 \leq X < 12)$.

$\{-3 \leq X < 12\}$ correspond aux valeurs -3, 0 et 4 (on inclut -3, on exclut 12) :

$$p(-3 \leq X < 12) = 0,25 + 0,2 + 0,3 = 0,75$$

Exercice n°3 : Une entreprise fabrique des ampoules LED. Elles sont conditionnées en cartons de 250 ampoules.

On considère la variable aléatoire Y associant le nombre d'ampoules défectueuses à un carton de 250 ampoules.

1. Décrire par une phrase :

- a) l'événement $\{Y = 12\}$: « le carton contient exactement 12 ampoules défectueuses ».
- b) l'événement $\{Y < 3\}$: « le carton contient strictement moins de 3 ampoules défectueuses », c'est-à-dire 0, 1 ou 2 ampoules défectueuses.
- c) l'événement $\{Y \geq 20\}$: « le carton contient au moins 20 ampoules défectueuses ».

2. Que signifient $p(Y > 5)$ et $p(Y = 0)$?

$p(Y > 5)$ est la probabilité que le carton contienne strictement plus de 5 ampoules défectueuses (donc au moins 6).

$p(Y = 0)$ est la probabilité que le carton ne contienne aucune ampoule défectueuse, c'est-à-dire que toutes les ampoules du carton soient en bon état.

3. Quelles sont les valeurs possibles prises par Y ?

Le nombre d'ampoules défectueuses est un entier compris entre 0 (aucune défectueuse) et 250 (toutes défectueuses). Donc Y prend ses valeurs dans $\{0; 1; 2; 3; \dots 250\}$.

4. Écrire à l'aide d'une notation la probabilité que le carton contienne entre 4 et 10 ampoules défectueuses (bornes comprises).

Cette probabilité se note $p(4 \leq Y \leq 10)$.

Exercice n°4 : À l'issue d'une chaîne de fabrication de tablettes numériques, on recherche deux types de défauts : les défauts d'écran et les défauts de batterie.

Une étude a permis de relever les résultats suivants sur un échantillon de 2 000 tablettes :

	Défaut de batterie	Pas de défaut de batterie	Total
Défaut d'écran	12	48	60
Pas de défaut d'écran	28	1 912	1 940
Total	40	1 960	2 000

À réparer, un défaut de batterie coûte 20 € par tablette et un défaut d'écran coûte 45 € par tablette.

X est la variable aléatoire donnant le coût de réparation d'une tablette avant sa mise sur le marché.

1. Quelles valeurs peut prendre X ?

Quatre cas se présentent :

- ⌘ aucun défaut : coût 0€ ;
- ⌘ seulement un défaut de batterie : coût 20€ ;
- ⌘ seulement un défaut d'écran : coût 45€ ;
- ⌘ les deux défauts : coût $20 + 45 = 65$ €.

Donc X prend les valeurs 0 ; 20 ; 45 et 65.

2. Décrire par une phrase l'événement $\{X \leq 45\}$.

$\{X \leq 45\}$: « le coût de réparation de la tablette est au plus de 45 € », autrement dit la tablette présente au plus un seul défaut (elle ne présente pas les deux défauts simultanément).

3. Que vaut $p(X = 20)$?

$\{X = 20\}$ correspond aux tablettes ayant un défaut de batterie **mais pas** de défaut d'écran : il y en a 28 sur 2 000.

$$p(X = 20) = \frac{28}{2\,000} = 0,014$$

4. Donner la loi de probabilité de X .

↗ $\{X = 0\}$: ni défaut d'écran ni défaut de batterie : 1 912 tablettes, soit $\frac{1912}{2000} = 0,956$.

↗ $\{X = 20\}$: 0,014 (question 3).

↗ $\{X = 45\}$: défaut d'écran seul : 48 tablettes, soit $\frac{48}{2000} = 0,024$.

↗ $\{X = 65\}$: les deux défauts : 12 tablettes, soit $\frac{12}{2000} = 0,006$.

x_i	0	20	45	65
$p(X = x_i)$	0,956	0,014	0,024	0,006

Exercice n°5 : Une variable aléatoire X peut prendre les valeurs -250 ; -50 ; 0 ; 75 ; 400 et $1\,200$. Définir par une phrase et donner les issues possibles (c'est-à-dire les valeurs de X concernées) pour chacun des événements suivants :

a) $\{X = 75\}$: « la variable aléatoire prend la valeur 75 ».

Issue possible : 75.

b) $\{X = 100\}$: « la variable aléatoire prend la valeur 100 ».

Or 100 ne fait pas partie des valeurs possibles : c'est un **événement impossible**, aucune issue ne le réalise. Sa probabilité est nulle.

c) $\{X > 0\}$: « la variable aléatoire prend une valeur strictement positive ».

Issues possibles : 75; 400; 1 200.

d) $\{X > 400\}$: « la variable aléatoire prend une valeur strictement supérieure à 400 ».

Issue possible : 1 200.

e) $\{X \geq 400\}$: « la variable aléatoire prend une valeur supérieure ou égale à 400 ».

Issues possibles : 400; 1 200.

f) $\{X \leq -50\}$: « la variable aléatoire prend une valeur inférieure ou égale à -50 ».

Issues possibles : -250 ; -50 .

g) $\{-50 < X \leq 400\}$: « la variable aléatoire prend une valeur strictement supérieure à -50 et inférieure ou égale à 400 ».

Issues possibles : 0; 75; 400.

Exercice n°6 : On lance 20 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

On note Z la variable aléatoire donnant le nombre de « Pile » obtenus sur les 20 lancers.

1. Quelles valeurs peut prendre Z ?

Le nombre de « Pile » est un entier compris entre 0 et 20 : Z prend ses valeurs dans $\{0; 1; 2; 3; \dots; 20\}$.

2. Utiliser une notation pour écrire les probabilités des événements suivants :

a) On obtient exactement huit fois « Pile ». $p(Z = 8)$

b) On obtient au moins une fois « Pile ». « Au moins une fois » signifie « 1 ou plus » : $p(Z \geq 1)$.

c) On obtient au plus six fois « Pile ». « Au plus six fois » signifie « 6 ou moins » : $p(Z \leq 6)$.

d) On obtient plus de quinze fois « Pile ». « Plus de quinze fois » signifie « strictement plus de 15 » : $p(Z > 15)$, ce qui équivaut à $p(Z \geq 16)$ car Z est à valeurs entières.

e) On n'obtient jamais « Pile ». $p(Z = 0)$

f) On obtient entre 8 et 12 fois « Pile », bornes comprises. $p(8 \leq Z \leq 12)$

3. Exprimer à l'aide de Z la variable aléatoire donnant le nombre de « Face » obtenus.

Chaque lancer donne soit « Pile », soit « Face ». Si l'on obtient Z fois « Pile » sur 20 lancers, on obtient $20 - Z$ fois « Face ». La variable aléatoire cherchée est donc $20 - Z$.

Exercice n°7 : La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	-4	-1	0	3	6	9
$p(X = x_i)$	0,08	0,22	0,3	0,17	0,13	0,10

Déterminer les probabilités suivantes :

a) Lecture directe dans le tableau : $p(X = 3) = 0,17$.

b) $\{X \leq 3\}$ regroupe les valeurs -4, -1, 0 et 3 : $p(X \leq 3) = 0,08 + 0,22 + 0,3 + 0,17 = 0,77$

c) $\{X > 3\}$ est l'événement contraire de $\{X \leq 3\}$: $p(X > 3) = 1 - 0,77 = 0,23$

d) $\{X \geq 0\}$ regroupe 0, 3, 6 et 9 : $p(X \geq 0) = 0,3 + 0,17 + 0,13 + 0,10 = 0,70$

e) $\{X < 0\}$ est l'événement contraire de $\{X \geq 0\}$: $p(X < 0) = 1 - 0,70 = 0,30$

f) $\{-1 < X < 9\}$ regroupe les valeurs strictement comprises entre -1 et 9, soit 0, 3 et 6 :
 $p(-1 < X < 9) = 0,3 + 0,17 + 0,13 = 0,60$

g) La valeur 5 n'est pas prise par X : l'événement est impossible, donc $p(X = 5) = 0$.

h) Toutes les valeurs de X sont inférieures ou égales à 9 : l'événement est certain, donc $p(X \leq 9) = 1$.

Exercice n°8 : Une variable aléatoire X prend des valeurs entières entre 0 et 80.

1. Quel est l'événement contraire de l'événement $\{X > 12\}$?

Le contraire de « X est strictement supérieure à 12 » est « X est inférieure ou égale à 12 » :

$$\overline{\{X > 12\}} = \{X \leq 12\}$$

Comme X prend des valeurs entières, on peut aussi écrire cet événement $\{X \leq 12\}$ sous la forme $\{X < 13\}$.

2. Sachant que $p(X > 9) = 0,64$, déterminer $p(X \leq 9)$.

Les événements $\{X > 9\}$ et $\{X \leq 9\}$ sont contraires, donc : $p(X \leq 9) = 1 - p(X > 9) = 1 - 0,64 = 0,36$.

3. Sachant que $p(X = 0) = 0,05$, quelle est la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur supérieure ou égale à 1 ?

Comme X prend des valeurs entières positives, « $X \geq 1$ » est l'événement contraire de « $X = 0$ » :
 $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,05 = 0,95$

4. On sait de plus que $p(X \leq 20) = 0,78$. Déterminer $p(10 \leq X \leq 20)$.

L'événement $\{X \leq 20\}$ se décompose en deux événements incompatibles : $\{X \leq 9\}$ et $\{10 \leq X \leq 20\}$ (car X est entière).

$$p(X \leq 20) = p(X \leq 9) + p(10 \leq X \leq 20)$$

$$0,78 = 0,36 + p(10 \leq X \leq 20)$$

$$p(10 \leq X \leq 20) = 0,78 - 0,36 = 0,42$$

5. Quelle est la valeur de $p(X \leq 80)$? Et celle de $p(X > 80)$?

Toutes les valeurs de X sont inférieures ou égales à 80 : l'événement $\{X \leq 80\}$ est **certain**, donc $p(X \leq 80) = 1$.

Son contraire $\{X > 80\}$ est **impossible**, donc $p(X > 80) = 0$.