



Exercice n°1 : Soit p un nombre premier et $a, b \in \mathbb{N}$.

Montrer que si p divise b et $a^3 + b^3$, alors p divise a .

Exercice n°2 : Soit n un entier relatif et p un nombre premier tels que $n^2 = 23p + 1$.

1. Factoriser $n^2 - 1$ et en déduire une égalité faisant intervenir $23p$.
2. À l'aide du lemme d'Euclide, montrer qu'il existe un entier relatif k tel que
$$n = 23k + 1 \text{ ou } n = 23k - 1.$$
3. Étudier séparément ces deux cas et déterminer tous les couples (n, p) vérifiant l'équation.

Exercice n°3 : Soit n un entier relatif tel que : $n^2 = 11p + 1$ où p est un nombre premier.

1. Écrire $11p$ comme un produit de facteurs fonction de n .
2. En s'inspirant de la méthode de l'exercice précédent, déterminer toutes les valeurs de n et p qui conviennent.

Exercice n°4 : Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

1. Montrer que $p^2 + 2$ est divisible par 3.
2. Montrer que $p^2 + 23$ est divisible par 8.
3. En déduire que $p^2 + 23$ est divisible par 24.



Correction

Exercice n°1 : Soit p un nombre premier et $a, b \in \mathbb{N}$.

Montrer que si p divise b et $a^3 + b^3$, alors p divise a .

Hypothèses : p premier, $p \mid b$ et $p \mid a^3 + b^3$.

Étape 1 : Isoler a^3 .

Puisque $p \mid b$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b = kp$, donc : $b^3 = k^3 p^3 = p \times (k^3 p^2)$

Ainsi $p \mid b^3$.

Étape 2 : Utiliser la linéarité de la divisibilité.

On sait que $p \mid a^3 + b^3$ et $p \mid b^3$. Or la différence de deux multiples de p est un multiple de p :

$$a^3 = (a^3 + b^3) - b^3$$

Donc $p \mid a^3$, c'est-à-dire $p \mid a \times a \times a$.

Étape 3 : Appliquer le lemme d'Euclide (corollaire du théorème de Gauss).

p est premier et p divise le produit $a \times (a \times a)$.

D'après le lemme d'Euclide : si un nombre premier divise un produit, il divise l'un des facteurs.

↪ Soit $p \mid a$: c'est terminé.

↪ Soit $p \mid a \times a = a^2$, et en réappliquant le lemme d'Euclide, $p \mid a$.

Dans tous les cas, $p \mid a$.

Conclusion : Si p divise b et $a^3 + b^3$, alors p divise a .

Exercice n°2 : Soit n un entier relatif et p un nombre premier tels que $n^2 = 23p + 1$.

1. Factoriser $n^2 - 1$ et en déduire une égalité faisant intervenir $23p$.

$$23p = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$$

2. À l'aide du lemme d'Euclide, montrer qu'il existe un entier relatif k tel que

$$n = 23k + 1 \text{ ou } n = 23k - 1.$$

L'égalité précédente montre que 23 divise le produit $(n - 1)(n + 1)$: $23 \mid (n - 1)(n + 1)$.

Or 23 est un nombre premier. D'après le **lemme d'Euclide**, si un nombre premier divise un produit, alors il divise au moins l'un des facteurs.

Par conséquent, $23 \mid n - 1$ ou $23 \mid n + 1$.

Si $23 \mid n - 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 1 = 23k$, donc $n = 23k + 1$.

Si $23 \mid n + 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n + 1 = 23k$, donc $n = 23k - 1$.

Ainsi, $n = 23k + 1$ ou $n = 23k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$

3. Étudier séparément ces deux cas et déterminer tous les couples (n, p) vérifiant l'équation.

Premier cas : $n = 23k + 1$

On utilise l'égalité $23p = (n - 1)(n + 1)$.

Comme $n = 23k + 1$, on a : $n - 1 = 23k$ et $n + 1 = 23k + 2$.

Donc $23p = 23k(23k + 2)$.

En divisant par 23, on obtient : $p = k(23k + 2)$

Or p est un nombre premier. Dans une décomposition de p en produit de deux entiers, l'un des deux facteurs doit donc être égal à 1 ou à -1 .

On étudie les différentes possibilités.

Si $k = 1$: $p = 1 \times (23 + 2) = 25$.

Mais $25 = 5^2$ n'est pas premier. Cette possibilité est rejetée.

Si $k = -1$: $p = (-1)(-23 + 2) = (-1)(-21) = 21$.

Mais $21 = 3 \times 7$ n'est pas premier. Cette possibilité est rejetée.

Si $23k + 2 = 1$: alors $23k = -1$, ce qui est impossible puisque k doit être entier.

Si $23k + 2 = -1$: alors $23k = -3$, ce qui est également impossible dans $\mathbb{Z}$.

Ainsi, le cas $n = 23k + 1$ ne fournit aucune solution.

Deuxième cas : $n = 23k - 1$

Comme $n = 23k - 1$, on a : $n - 1 = 23k - 2$ et $n + 1 = 23k$.

Par conséquent, $23p = (23k - 2)(23k)$.

En divisant par 23, on obtient : $p = k(23k - 2)$

De nouveau, puisque p est premier, l'un des deux facteurs doit être égal à 1 ou à -1 .

Si $k = 1$: $p = 1 \times (23 - 2) = 21$.

Comme 21 n'est pas premier, cette possibilité est rejetée.

Si $k = -1$: $p = (-1)(-23 - 2) = (-1)(-25) = 25$.

Comme 25 n'est pas premier, cette possibilité est rejetée.

Si $23k - 2 = 1$: alors $23k = 3$, ce qui est impossible pour $k \in \mathbb{Z}$.

Si $23k - 2 = -1$: alors $23k = 1$, ce qui est également impossible pour $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, le cas $n = 23k - 1$ ne fournit aucune solution.

Conclusion : Aucun des deux cas possibles ne permet d'obtenir un nombre premier p . Par conséquent, l'équation proposée n'admet aucune solution :

Il n'existe aucun couple $(n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{P}$ tel que $n^2 = 23p + 1$

Exercice n°3 : Soit n un entier relatif tel que : $n^2 = 11p + 1$ où p est un nombre premier.

1. Écrire $11p$ comme un produit de facteurs fonction de n .

$$11p = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$$

2. En s'inspirant de la méthode de l'exercice précédent, déterminer toutes les valeurs de n et p qui conviennent.

11 est premier et divise $(n - 1)(n + 1)$. D'après le lemme d'Euclide, $11 \mid n - 1$ ou $11 \mid n + 1$, donc :
 $n = 11k + 1$ ou $n = 11k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$

Cas 1 : $n = 11k + 1$.

$$11p = (11k)(11k + 2) \Rightarrow p = k(11k + 2)$$

p premier $\Rightarrow$ l'un des facteurs vaut ± 1 .

$k = 1$: $p = 1 \times 13 = 13$. 13 est premier : solution acceptée !

Alors $n = 11 \times 1 + 1 = 12$. Vérification : $12^2 = 144 = 11 \times 13 + 1 = 143 + 1$.

$k = -1$: $p = (-1)(-9) = 9 = 3^2$, non premier. Rejeté.

$11k + 2 = 1 \Rightarrow 11k = -1$: impossible.

$11k + 2 = -1 \Rightarrow 11k = -3$: impossible.

$k = 0 \Rightarrow p = 0$: rejeté.

$|k| \geq 2 \Rightarrow |11k + 2| \geq 20$: produit de deux facteurs ≥ 2 , non premier. Rejeté.

Cas 2 : $n = 11k - 1$.

$$11p = (11k - 2)(11k) \Rightarrow p = k(11k - 2)$$

$k = 1$: $p = 1 \times 9 = 9$, non premier. Rejeté.

$k = -1$: $p = (-1) \times (-13) = 13$. Premier : solution acceptée !

Alors $n = 11 \times (-1) - 1 = -12$. Vérification : $(-12)^2 = 144 = 11 \times 13 + 1$.

Les autres cas se rejettent comme précédemment ($|k| \geq 2$ donne $|11k - 2| \geq 20$).

Conclusion : Les seules solutions sont $n = 12$ ou $n = -12$, avec $p = 13$

Exercice n°4 : Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

1. Montrer que $p^2 + 2$ est divisible par 3.

$p \geq 5$ est premier, donc p n'est pas divisible par 3 (sinon $3 \mid p$ avec $1 < 3 < p$, ce qui contredirait la primalité).

Les restes possibles dans la division euclidienne de p par 3 sont donc 1 ou 2.

Si $p \equiv 1 [3]$: $p^2 + 2 \equiv 1^2 + 2 \equiv 3 \equiv 0 [3]$

Si $p \equiv 2 [3]$: $p^2 + 2 \equiv 4 + 2 \equiv 6 \equiv 0 [3]$

Dans tous les cas, $3 \mid p^2 + 2$.

2. Montrer que $p^2 + 23$ est divisible par 8.

Écrivons : $p^2 + 23 = (p^2 - 1) + 24 = (p - 1)(p + 1) + 24$

$p \geq 5$ premier donc p est impair. Donc $p - 1$ et $p + 1$ sont deux entiers multiples consécutifs de 2 : l'un des deux est divisible par 2 et l'autre par 4.

Leur produit $(p - 1)(p + 1)$ est donc divisible par $2 \times 4 = 8$.

Comme $24 = 8 \times 3$ est aussi divisible par 8, la somme $(p - 1)(p + 1) + 24$ est divisible par 8.

Donc $8 \mid p^2 + 23$.

3. En déduire que $p^2 + 23$ est divisible par 24.

D'après 1., $3 \mid p^2 + 2$. Or $p^2 + 23 = (p^2 + 2) + 21$ et $3 \mid 21$, donc $3 \mid p^2 + 23$.

Ainsi : $3 \mid p^2 + 23$ et $8 \mid p^2 + 23$.

Or $\text{PGCD}(3 ; 8) = 1$: 3 et 8 sont premiers entre eux.

D'après le corollaire du théorème de Gauss : *si deux entiers premiers entre eux divisent un même entier, alors leur produit divise cet entier.*

Donc $3 \times 8 = 24$ divise $p^2 + 23$.