



Exercice n°1 :

1. Décomposer 1 176 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 1 176 ?
2. À l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer tous les diviseurs de 1 176.

Exercice n°2 :

1. Décomposer 6 300 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 6 300 ?
2. Proposer un algorithme (en langage naturel ou en Python) permettant d'énumérer tous les diviseurs de 6 300.
3. Combien 6 300 possède-t-il de diviseurs qui sont des carrés parfaits ?

Exercice n°3 :

1. Décomposer 120^{120} en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 120^{120} ?
2. À partir du résultat de la question 1., déterminer un nombre possédant plus de dix milliards de diviseurs.
3. Déterminer le plus petit entier n tel que 120^n possède plus d'un million de diviseurs.

Exercice n°4 : Soit n un entier naturel possédant exactement trois diviseurs positifs. On suppose de plus que $n - 1$ est le cube d'un nombre premier.

1. Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que $n = p^2$.

2. On note q le nombre premier tel que $n - 1 = q^3$.

Montrer que p est impair, puis que $q = 2$.

3. En déduire la valeur de n et vérifier qu'elle satisfait toutes les conditions de l'énoncé.

Exercice n°5 :

1. Trouver le nombre de diviseurs de 3 969 à l'aide d'une décomposition en facteurs premiers.
2. À l'aide d'un tableau à double entrée, trouver tous les diviseurs de 3 969.
3. En déduire la somme de tous les diviseurs de 3 969.



Correction

Exercice n°1 :

1. Décomposer 1 176 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 1 176 ?

On divise successivement par les nombres premiers dans l'ordre croissant :

$$1\,176 = 2 \times 588$$

$$588 = 2 \times 294$$

$$294 = 2 \times 147$$

$$147 = 3 \times 49$$

$$49 = 7 \times 7$$

$$\text{Donc : } 1\,176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$$

Un diviseur de 1 176 s'écrit de façon **unique** sous la forme $2^a \times 3^b \times 7^c$ avec $0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq 2$.

Il y a donc 4 choix pour a , 2 choix pour b et 3 choix pour c , soit :

$$(3 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 4 \times 2 \times 3 = 24 \text{ diviseurs.}$$

2. À l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer tous les diviseurs de 1 176.

Comme $2^3 \times 3 = 24$ possède $4 \times 2 = 8$ diviseurs (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24) et que les puissances de 7 sont 1, 7, 49, on construit le tableau : en ligne les diviseurs de $2^3 \times 3$, en colonne les puissances de 7.

×	1	7	49
1	1	7	49
2	2	14	98
3	3	21	147
4	4	28	196
6	6	42	294
8	8	56	392
12	12	84	588
24	24	168	1176

Les 24 diviseurs de 1 176 sont donc :

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 49, 56, 84, 98, 147, 168, 196, 294, 392, 588, 1 176.

Exercice n°2 :

1. Décomposer 6 300 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 6 300 ?

$$6\,300 = 2 \times 3\,150$$

$$3\,150 = 2 \times 1\,575$$

$$1\,575 = 3 \times 525$$

$$525 = 3 \times 175$$

$$175 = 5 \times 35$$

$$35 = 5 \times 7$$

$$\text{Donc : } 6\,300 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

$$\text{Nombre de diviseurs : } (2 + 1)(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54 \text{ diviseurs.}$$

2. Proposer un algorithme (en langage naturel ou en Python) permettant d'énumérer tous les diviseurs de 6 300.

Pour k allant de 1 à 6 300 :

Si le reste de la division euclidienne de 6 300 par k est nul, alors afficher k .

En Python :

```
python
```

```
n = 6300
```

```
for k in range(1, n+1):
```

```
    if n % k == 0:
```

```
        print(k)
```

3. Combien 6 300 possède-t-il de diviseurs qui sont des carrés parfaits ?

Un diviseur $2^a 3^b 5^c 7^d$ est un carré parfait si et seulement si a, b, c, d sont pairs.

- $a \in \{0, 2\}$: 2 choix
- $b \in \{0, 2\}$: 2 choix
- $c \in \{0, 2\}$: 2 choix
- $d = 0$: 1 choix

Soit $2 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$ diviseurs carrés parfaits : 1, 4, 9, 25, 36, 100, 225 et 900.

Exercice n°3 :

1. Décomposer 120^{120} en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 120^{120} ?

On décompose d'abord 120 :

$$120 = 8 \times 15 = 2^3 \times 3 \times 5$$

Donc :

$$120^{120} = (2^3 \times 3 \times 5)^{120} = 2^{360} \times 3^{120} \times 5^{120}$$

Nombre de diviseurs :

$$(360 + 1)(120 + 1)(120 + 1) = 361 \times 121 \times 121$$

Calcul : $121 \times 121 = 14\,641$, puis $361 \times 14\,641 = 5\,285\,401$.

120^{120} possède donc 5 285 401 diviseurs.

2. À partir du résultat de la question 1., déterminer un nombre possédant plus de dix milliards de diviseurs.

On cherche n tel que 120^n ait plus de 10^{10} diviseurs. Le nombre de diviseurs de $120^n =$

$$2^{3n} \times 3^n \times 5^n \text{ est } d(n) = (3n + 1)(n + 1)^2$$

Pour $n = 120$ on a environ $5,3 \times 10^6$. Essayons $n = 1\,500$:

$$d = (4\,501) \times (1\,501)^2 = 4\,501 \times 2\,253\,001 \approx 1,014 \times 10^{10} > 10^{10}$$

Précisément : $4\,501 \times 2\,253\,001 = 10\,140\,757\,501$.

Donc 120^{1500} possède 10 140 757 501 diviseurs, soit plus de dix milliards.

3. Déterminer le plus petit entier n tel que 120^n possède plus d'un million de diviseurs.

On cherche le plus petit n tel que $(3n + 1)(n + 1)^2 > 10^6$.

Pour n grand, $(3n + 1)(n + 1)^2 \approx 3n^3$, donc $n \approx \sqrt[3]{10^6/3} \approx 69,3$.

- $n = 68$: $(205) \times (69)^2 = 205 \times 4\,761 = 976\,005 < 10^6$
- $n = 69$: $(208) \times (70)^2 = 208 \times 4\,900 = 1\,019\,200 > 10^6$

Le plus petit entier cherché est donc $n = 69$.

Exercice n°4 : Soit n un entier naturel possédant exactement trois diviseurs positifs. On suppose de plus que $n - 1$ est le cube d'un nombre premier.

1. Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que $n = p^2$.

Ecrivons la décomposition en facteurs premiers de n : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, où $p_1, \dots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et où les exposants α_i sont des entiers strictement positifs.

Le nombre de diviseurs positifs de n est alors : $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Or n possède exactement trois diviseurs, donc : $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) = 3$.

Comme 3 est un nombre premier, ce produit ne peut comporter qu'un seul facteur. On a donc : $k = 1$

Et $\alpha_1 + 1 = 3$.

Ainsi : $\alpha_1 = 2$.

Par conséquent, il existe un nombre premier p tel que : $n = p^2$

Les trois diviseurs positifs de n sont alors 1, p et p^2 .

2. On note q le nombre premier tel que $n - 1 = q^3$.

Par hypothèse, $n - 1$ est le cube d'un nombre premier q . On a donc : $n - 1 = q^3$.

Comme $n = p^2$, cette égalité devient : $p^2 - 1 = q^3$.

Montrer que p est impair, puis que $q = 2$.

Montrons que p est impair :

Supposons que $p = 2$. On aurait alors : $p^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$.

Il faudrait donc que : $q^3 = 3$, ce qui est impossible puisque 3 n'est le cube d'aucun entier.

Ainsi, $p \neq 2$. Comme p est premier, on en déduit que p est impair.

Montrons que $q = 2$:

Puisque p est impair, p^2 est impair. Par conséquent : $p^2 - 1$ est pair.

Or : $q^3 = p^2 - 1$.

Ainsi, q^3 est pair. Un cube est pair si et seulement si l'entier dont il est le cube est pair. Le nombre premier q est donc pair.

Le seul nombre premier pair étant 2, on obtient : $q = 2$.

3. En déduire la valeur de n et vérifier qu'elle satisfait toutes les conditions de l'énoncé.

Comme $q = 2$, l'égalité $p^2 - 1 = q^3$ donne $p^2 - 1 = 2^3$.

Ainsi : $p^2 - 1 = 8$, puis : $p^2 = 9$.

Comme p est un nombre premier positif : $p = 3$.

On en déduit : $n = p^2 = 3^2 = 9$.

Ainsi : $n = 9$

Vérifions : Les diviseurs positifs de 9 sont : 1, 3, 9.

Le nombre 9 possède donc bien exactement trois diviseurs.

De plus : $n - 1 = 9 - 1 = 8 = 2^3$, et 2 est bien un nombre premier.

Toutes les conditions sont satisfaites. La seule solution est donc : $n = 9$.

Exercice n°5 :

1. Trouver le nombre de diviseurs de 3 969 à l'aide d'une décomposition en facteurs premiers.

3 969 est impair. La somme de ses chiffres est $3 + 9 + 6 + 9 = 27$, divisible par 9 : 3 969 est divisible par 9.

$$3\,969 = 3 \times 1\,323$$

$$1\,323 = 3 \times 441$$

$$441 = 3 \times 147$$

$$147 = 3 \times 49$$

$$49 = 7^2$$

Donc : $3\,969 = 3^4 \times 7^2 = (3^2 \times 7)^2 = 63^2$

Nombre de diviseurs : $(4 + 1)(2 + 1) = 5 \times 3 = 15$ diviseurs.

2. À l'aide d'un tableau à double entrée, trouver tous les diviseurs de 3 969.

Tableau croisant les puissances de 3 (en lignes) et les puissances de 7 (en colonnes) :

$\times$	$7^0 = 1$	$7^1 = 7$	$7^2 = 49$
$3^0 = 1$	1	7	49
$3^1 = 3$	3	21	147
$3^2 = 9$	9	63	441
$3^3 = 27$	27	189	1 323

$3^4 = 81$	81	567	3 969
------------	----	-----	-------

Les 15 diviseurs de 3 969, rangés dans l'ordre croissant :
 1, 3, 7, 9, 21, 27, 49, 63, 81, 147, 189, 441, 567, 1 323, 3 969.

3. En déduire la somme de tous les diviseurs de 3 969.

La somme des diviseurs s'obtient en développant le produit :

$$\begin{aligned}\sigma(3\,969) &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)(1 + 7 + 7^2) \\ &= (1 + 3 + 9 + 27 + 81)(1 + 7 + 49) = 121 \times 57 = 6\,897\end{aligned}$$