



Exercice n°1 :

1. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
2. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice n°2 :

1. Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

Exercice n°3 :

1. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$.
2. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\sin(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice n°4 :

1. Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ l'inéquation $\cos(x) < -\frac{1}{2}$.
2. Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ l'inéquation $\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice n°5 :

1. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$ l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Résoudre sur $]0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\sin(x) \geq -\frac{1}{2}$.

Exercice n°6 :

1. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.
2. Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ l'inéquation $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice n°7 : Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos(x) \geq \frac{1}{2} \\ \sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Exercice n°8 : Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice n°9 : Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos(x) \leq -\frac{1}{2} \\ \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Correction

Exercice n°1 :

1. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

On trace la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ (droite verticale) et on relève les points d'intersection entre cette droite et le cercle trigonométrique.

Il y a deux points d'intersection, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ils correspondent aux angles $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

Comme on travaille sur $[0 ; 2\pi[$, on remplace $-\frac{\pi}{3}$ par son représentant dans cet intervalle :

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$

Les solutions sur $[0 ; 2\pi[$ sont donc : $x_1 = \frac{\pi}{3}$ et $x_2 = \frac{5\pi}{3}$.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

2. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On trace la droite d'équation $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (droite horizontale) et on relève les points d'intersection avec le cercle.

Il y a deux points d'intersection, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, situés dans la moitié basse du cercle. Ils correspondent aux angles $-\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

Sur $[0 ; 2\pi[$:

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \text{ et } -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

Exercice n°2 :

1. Résoudre sur $]-\pi ; \pi]$ l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On trace la droite verticale d'équation $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et on relève les points d'intersection avec le cercle trigonométrique.

Ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et situés dans la moitié gauche du cercle : ils correspondent aux angles $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.

Ces deux valeurs appartiennent bien à $]-\pi ; \pi]$.

$$S = \left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

2. Résoudre sur $]-\pi ; \pi]$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

On trace la droite horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$ et on relève les points d'intersection avec le cercle.

Ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et situés dans la moitié haute du cercle : ils correspondent aux angles $\frac{\pi}{6}$ et $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Ces deux valeurs appartiennent bien à $]-\pi ; \pi]$.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Exercice n°3 :

1. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$.

On trace la droite verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ et on relève les points du cercle situés à **droite** de cette droite.

Les points d'intersection correspondent aux angles $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire $\frac{5\pi}{3}$ sur $[0 ; 2\pi[$.

L'arc situé à droite de la droite est celui qui contient l'angle 0: il est donc « coupé en deux » par l'origine de l'intervalle. On obtient :

$$S = \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3} ; 2\pi\right[$$

2. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\sin(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On trace la droite horizontale d'équation $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et on relève les points du cercle situés **au-dessous** de cette droite.

Les points d'intersection correspondent aux angles $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$, soit $\frac{7\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ sur $[0 ; 2\pi[$.

L'arc situé sous la droite est celui qui contient l'angle $\frac{3\pi}{2}$, on le parcourt de $\frac{5\pi}{4}$ à $\frac{7\pi}{4}$:

$$S = \left[\frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\right]$$

Exercice n°4 :

1. Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ l'inéquation $\cos(x) < -\frac{1}{2}$.

On trace la droite verticale d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et on relève les points du cercle **strictement à gauche** de cette droite.

Les points d'intersection correspondent aux angles $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

L'arc situé à gauche de la droite est celui qui contient l'angle π . Sur $] -\pi ; \pi]$, cet arc est décrit par deux morceaux :

$$S =] -\pi ; -\frac{2\pi}{3}[\cup] \frac{2\pi}{3} ; \pi]$$

2. Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ l'inéquation $\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On trace la droite horizontale d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et on relève les points du cercle **strictement au-dessus** de cette droite.

Les points d'intersection correspondent aux angles $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

L'arc situé au-dessus de la droite contient $\frac{\pi}{2}$:

$$S = \left] \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right[$$

Exercice n°5 :

1. Résoudre sur $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} \right]$ l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On trace la droite verticale $x = \frac{\pi}{2}$ et on relève les points du cercle situés à **gauche** de cette droite.

Les points d'intersection correspondent aux angles $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$, soit $\frac{7\pi}{4}$.

L'arc à gauche contient π : il va de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{7\pi}{4}$ (dans le sens direct). Or $\frac{7\pi}{4} > \frac{3\pi}{2}$: cette borne n'appartient pas à l'intervalle d'étude. On prend donc le représentant $-\frac{\pi}{4}$, qui appartient à $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} \right]$.

L'arc solution intersecté avec l'intervalle d'étude donne :

$$S = \left] -\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{2} \right]$$

2. Résoudre sur $]0 ; 2\pi]$ l'inéquation $\sin(x) \geq -\frac{1}{2}$.

On trace la droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$ et on relève les points du cercle situés **au-dessus** de cette droite.

Les points d'intersection correspondent aux angles $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$, soit $\frac{11\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$ sur $]0 ; 2\pi]$.

L'arc au-dessus de la droite contient $\frac{\pi}{2}$: on part de $\frac{11\pi}{6}$, on passe par 0 (soit 2π), puis on va jusqu'à $\frac{7\pi}{6}$. Sur $]0 ; 2\pi]$ cela se coupe en deux morceaux :

$$S =]0 ; \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6} ; 2\pi]$$

Exercice n°6 :

1. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.

On trace la droite verticale $x = -\frac{1}{2}$ et on relève les points d'intersection avec le cercle.

Ils correspondent aux angles $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

Sur $[0 ; 2\pi[$: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} \right\}$$

2. Résoudre sur $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On trace la droite horizontale $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et on relève les points du cercle situés **au-dessous** de cette droite.

Les points d'intersection correspondent aux angles $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

L'arc situé sous la droite part de $\frac{3\pi}{4}$, passe par π , puis par $-\frac{\pi}{2}$, et arrive en $\frac{\pi}{4}$. Sur $]-\pi ; \pi]$, il se décrit en deux morceaux :

$$S =]-\pi ; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4} ; \pi]$$

Exercice n°7 : Résoudre sur $]-\pi ; \pi]$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos(x) \geq \frac{1}{2} \\ \sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Étape 1 : première inéquation.

On trace la droite verticale $x = \frac{1}{2}$ et on relève les points du cercle à droite de cette droite. Les points d'intersection correspondent à $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

$$S_1 = \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} \right]$$

Étape 2 : deuxième inéquation.

On trace la droite horizontale $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et on relève les points du cercle au-dessus de cette droite. Les points d'intersection correspondent à $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

$$S_2 = \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right]$$

Étape 3 : intersection.

$$S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} \right] \cap \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right] = \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3} \right]$$

Exercice n°8 : Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Étape 1 : première inéquation.

Droite verticale $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; on garde les points du cercle à gauche. Intersections en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

$$S_1 = \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} \right]$$

Étape 2 : deuxième inéquation.

Droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$; on garde les points du cercle au-dessous. Intersections en $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

$$S_2 = \left[\frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6} \right]$$

Étape 3 : intersection.

$$\frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{6} < \frac{7\pi}{4} < \frac{11\pi}{6}$$
$$S = \left[\frac{7\pi}{6} ; \frac{7\pi}{4} \right]$$

Exercice n°9 : Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos(x) \leq -\frac{1}{2} \\ \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Étape 1 : première inéquation.

Droite verticale $x = -\frac{1}{2}$; on garde les points du cercle à gauche. Intersections en $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$. L'arc à gauche contient π , donc sur $] -\pi ; \pi]$:

$$S_1 = \left] -\pi ; -\frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi \right]$$

Étape 2 : deuxième inéquation.

Droite horizontale $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; on garde les points du cercle au-dessous. Intersections en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$. L'arc au-dessous contient $-\frac{\pi}{2}$, donc :

$$S_2 = \left] -\pi ; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi \right]$$

Étape 3 : intersection.

↪ $\left] -\pi ; -\frac{2\pi}{3} \right] \subset \left] -\pi ; \frac{\pi}{3} \right]$: cet intervalle est conservé entièrement.

↪ $\left[\frac{2\pi}{3} ; \pi \right]$ est commun aux deux : il est conservé entièrement.

$$S = \left] -\pi ; -\frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi \right]$$