



Exercice n°1 :

1. Mettre le système suivant sous forme d'équation matricielle en justifiant.

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$$

2. En déduire les solutions du système.

Exercice n°2 :

1. Mettre le système suivant sous forme d'équation matricielle en justifiant.

$$\begin{cases} 2x + z - y = 4 \\ 3z - x + 5y = 1 \\ y + 4x - 2z = -3 \end{cases}$$

2. En déduire les solutions du système.

Exercice n°3 :

1. Mettre le système suivant sous forme d'équation matricielle en justifiant.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z - t = 5 \\ x + 5t - 3z = 2y - 7 \\ 2y + z - x = 4 + 3t \\ 4x + y - 2z + 6t = 0 \end{cases}$$

2. En déduire les solutions du système.

Exercice n°4 :

1. Mettre le système suivant sous forme d'équation matricielle en justifiant.

$$\begin{cases} 3a + 2b - c = 4b + 5 \\ 2a - 3c + 4d = b - 2a + 1 \\ a + b + c + d = 2c - 3 \\ 5b - 2d = 3a + c - 8 \end{cases}$$

2. En déduire les solutions du système.



Correction

Exercice n°1 :

1. Mettre le système suivant sous forme d'équation matricielle en justifiant.

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$ équivaut à $AX = B$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$.

En effet : $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y + 2z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}$.

Donc, par identification des coefficients, $AX = B$

si, et seulement si : $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$

2. En déduire les solutions du système.

A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$ donc $X = A^{-1}B$.

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$.

Donc le système a pour solution $x = \frac{13}{3}$; $y = 0$ et $z = \frac{7}{3}$.

Exercice n°2 :

1. Mettre le système suivant sous forme d'équation matricielle en justifiant.

$$\begin{cases} 2x + z - y = 4 \\ 3z - x + 5y = 1 \\ y + 4x - 2z = -3 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} 2x + z - y = 4 \\ 3z - x + 5y = 1 \\ y + 4x - 2z = -3 \end{cases}$ équivaut à $AX = B$

où $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

En effet : $AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + 5y + 3z \\ 4x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z - y \\ 3z - x + 5y \\ y + 4x - 2z \end{pmatrix}$.

Donc, par identification des coefficients, $AX = B$

si, et seulement si : $\begin{cases} 2x + z - y = 4 \\ 3z - x + 5y = 1 \\ y + 4x - 2z = -3 \end{cases}$

2. En déduire les solutions du système.

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{57} \begin{pmatrix} 13 & 1 & 8 \\ -10 & 8 & 7 \\ 21 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \text{ donc } X = A^{-1}B.$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{57} \begin{pmatrix} 13 & 1 & 8 \\ -10 & 8 & 7 \\ 21 & 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{57} \begin{pmatrix} 29 \\ -53 \\ 117 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{57} \\ -\frac{53}{57} \\ \frac{39}{19} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc le système a pour solution } x = \frac{29}{57}; y = -\frac{53}{57} \text{ et } z = \frac{39}{19}.$$

Exercice n°3 :

1. Mettre le système suivant sous forme d'équation matricielle en justifiant.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z - t = 5 \\ x + 5t - 3z = 2y - 7 \\ 2y + z - x = 4 + 3t \\ 4x + y - 2z + 6t = 0 \end{cases}$$

On commence par regrouper dans chaque équation les termes en x, y, z, t à gauche et les constantes à droite :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z - t = 5 \\ x + 5t - 3z = 2y - 7 \\ 2y + z - x = 4 + 3t \\ 4x + y - 2z + 6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 4z - t = 5 \\ x - 2y - 3z + 5t = -7 \\ -x + 2y + z - 3t = 4 \\ 4x + y - 2z + 6t = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut à $AX = B$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En effet : } AX = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + 4z - t \\ x - 2y - 3z + 5t \\ -x + 2y + z - 3t \\ 4x + y - 2z + 6t \end{pmatrix}.$$

Donc, par identification des coefficients, $AX = B$

$$\text{si, et seulement si : } \begin{cases} 3x - 2y + 4z - t = 5 \\ x - 2y - 3z + 5t = -7 \\ -x + 2y + z - 3t = 4 \\ 4x + y - 2z + 6t = 0 \end{cases}$$

2. En déduire les solutions du système.

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 20 & 55 & 77 & -4 \\ -8 & -22 & -22 & 6 \\ -18 & -66 & -88 & 8 \\ -18 & -55 & -77 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \text{ donc } X = A^{-1}B.$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 20 & 55 & 77 & -4 \\ -8 & -22 & -22 & 6 \\ -18 & -66 & -88 & 8 \\ -18 & -55 & -77 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 23 \\ 26 \\ 20 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{22} \\ \frac{13}{11} \\ \frac{10}{11} \\ -\frac{13}{22} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc le système a pour solution } x = \frac{23}{22}; y = \frac{13}{11}; z = \frac{10}{11} \text{ et } t = -\frac{13}{22}.$$

Exercice n°4 :

1. Mettre le système suivant sous forme d'équation matricielle en justifiant.

$$\begin{cases} 3a + 2b - c = 4b + 5 \\ 2a - 3c + 4d = b - 2a + 1 \\ a + b + c + d = 2c - 3 \\ 5b - 2d = 3a + c - 8 \end{cases}$$

On commence par regrouper dans chaque équation les termes en a, b, c, d à gauche et les constantes à droite :

$$\begin{cases} 3a + 2b - c = 4b + 5 \\ 2a - 3c + 4d = b - 2a + 1 \\ a + b + c + d = 2c - 3 \\ 5b - 2d = 3a + c - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b - c + 0d = 5 \\ 4a - b - 3c + 4d = 1 \\ a + b - c + d = -3 \\ -3a + 5b - c - 2d = -8 \end{cases}$$

Ce système équivaut à $MX = B$

$$\text{où } M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En effet : } MX = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 2b - c \\ 4a - b - 3c + 4d \\ a + b - c + d \\ -3a + 5b - c - 2d \end{pmatrix}.$$

Donc, par identification des coefficients, $MX = B$

$$\text{si, et seulement si : } \begin{cases} 3a - 2b - c = 5 \\ 4a - b - 3c + 4d = 1 \\ a + b - c + d = -3 \\ -3a + 5b - c - 2d = -8 \end{cases}$$

2. En déduire les solutions du système.

$$M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 8 & -13 & 38 & -7 \\ -1 & -10 & 34 & -3 \\ -5 & -19 & 46 & -15 \\ -12 & 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$MX = B \Leftrightarrow M^{-1}MX = M^{-1}B \text{ donc } X = M^{-1}B.$$

$$X = M^{-1}B = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 8 & -13 & 38 & -7 \\ -1 & -10 & 34 & -3 \\ -5 & -19 & 46 & -15 \\ -12 & 4 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} -31 \\ -93 \\ -62 \\ -31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc le système a pour solution $a = -1; b = -3; c = -2$ et $d = -1$.