



Exercice n°1 : On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AB .

Exercice n°2 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Calculer AX .

Exercice n°3 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer AB .

Exercice n°4 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer AB .

Exercice n°5 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB .
2. Calculer BA .
3. Que remarque-t-on ?

Exercice n°6 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner les dimensions de A et de B .
2. Le produit AB est-il défini ?
3. Calculer AB .

Exercice n°7 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculer :

$$ABC$$

On pourra calculer d'abord BC , puis $A(BC)$.

Exercice n°8 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que le produit ABC est défini.
2. Calculer ABC en commençant par BC .
3. Calculer ABC en commençant par AB .
4. Vérifier que l'on obtient le même résultat.

Exercice n°9 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AI .
2. Calculer IA .
3. Quelle propriété de la matrice identité illustre cet exercice ?

Exercice n°10 : Une entreprise fabrique deux types de produits P_1 et P_2 .

La matrice suivante donne le nombre d'heures nécessaires dans deux ateliers A_1 et A_2 pour fabriquer une unité de chaque produit :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Les quantités fabriquées pendant trois semaines sont données par la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

1. Préciser les dimensions de M et de Q .
2. Calculer le produit MQ .
3. Interpréter les coefficients de la matrice obtenue.



Correction

Exercice n°1 : On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AB .

On a A de taille 1×2 et B de taille 2×1 . Le produit est donc une matrice de taille 1×1 .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = (2 \times 4 + 3 \times 5) = (8 + 15) = (23)$$

Exercice n°2 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Calculer AX .

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 12 \\ 15 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Exercice n°3 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 2 & 2 \times 4 + 1 \times 5 \\ 0 \times 1 + 3 \times 2 & 0 \times 4 + 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2 & 8 + 5 \\ 0 + 6 & 0 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Exercice n°4 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer AB .

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \times 5 + 3 \times (-1) & (-1) \times (-2) + 3 \times 3 \\ 2 \times 5 + (-4) \times (-1) & 2 \times (-2) + (-4) \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 - 3 & 2 + 9 \\ 10 + 4 & -4 - 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 14 & -16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice n°5 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 0 & 1 \times 1 + 2 \times 4 \\ 3 \times 2 + 0 \times 0 & 3 \times 1 + 0 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 0 & 1 + 8 \\ 6 + 0 & 3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Calculer BA .

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 3 & 2 \times 2 + 1 \times 0 \\ 0 \times 1 + 4 \times 3 & 0 \times 2 + 4 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3 & 4 + 0 \\ 0 + 12 & 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Que remarque-t-on ?

On constate que $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général ($AB \neq BA$).

Exercice n°6 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner les dimensions de A et de B .

↪ A a 2 lignes et 3 colonnes → A est de taille 2×3 .

↪ B a 3 lignes et 2 colonnes → B est de taille 3×2 .

2. Le produit AB est-il défini ?

Le produit AB est défini car le nombre de colonnes de $A(3)$ est égal au nombre de lignes de $B(3)$. Le résultat sera une matrice de taille 2×2 .

3. Calculer AB .

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 0 + 2 \times 4 & 1 \times 1 + 0 \times (-1) + 2 \times 3 \\ (-1) \times 2 + 3 \times 0 + 1 \times 4 & (-1) \times 1 + 3 \times (-1) + 1 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + 0 + 8 & 1 + 0 + 6 \\ -2 + 0 + 4 & -1 - 3 + 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice n°7 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculer :

$$ABC$$

On pourra calculer d'abord BC , puis $A(BC)$.

B est 2×2 et C est 2×1 , donc BC est 2×1 :

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 1 \times 4 \\ 2 \times 1 + 0 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 4 \\ 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Maintenant, calculons $A(BC)$:

$$ABC = A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 2 \\ 0 \times 7 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 4 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$ABC = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice n°8 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que le produit ABC est défini.

A est 2×3 , B est 3×2 → AB est défini et sera 2×2 .

C est 2×1 → $(AB)C$ est défini et sera 2×1 .

L'ordre $A(BC)$ est aussi défini car $B(3 \times 2) \times C(2 \times 1)$ donne une 3×1 , multipliable par $A(2 \times 3)$.

Le produit est bien défini.

2. Calculer ABC en commençant par BC .

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times (-2) \\ 0 \times 3 + (-1) \times (-2) \\ 4 \times 3 + 0 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4 \\ 0 + 2 \\ 12 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 0 \times 2 + 1 \times 12 \\ 1 \times (-1) + (-1) \times 2 + 3 \times 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 0 + 12 \\ -1 - 2 + 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 33 \end{pmatrix}$$

3. Calculer ABC en commençant par AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 4 & 2 \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + (-1) \times 0 + 3 \times 4 & 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 3 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 3 + 4 \times (-2) \\ 13 \times 3 + 3 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 8 \\ 39 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 33 \end{pmatrix}$$

4. Vérifier que l'on obtient le même résultat.

On constate que :

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 10 \\ 33 \end{pmatrix} \text{ et } (AB)C = \begin{pmatrix} 10 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A(BC) = (AB)C$$

On obtient bien le même résultat quelle que soit la façon de regrouper les produits. Cela illustre la propriété d'associativité de la multiplication des matrices : pour des matrices de tailles compatibles, on a toujours $(AB)C = A(BC)$.

Exercice n°9 : On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AI .

$$AI = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + (-1) \times 0 & 4 \times 0 + (-1) \times 1 \\ 2 \times 1 + 3 \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Calculer IA .

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 0 \times 2 & 1 \times (-1) + 0 \times 3 \\ 0 \times 4 + 1 \times 2 & 0 \times (-1) + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Quelle propriété de la matrice identité illustre cet exercice ?

La matrice identité I est l'**élément neutre** pour la multiplication des matrices carrées. Multiplier une matrice à gauche ou à droite par I laisse la matrice inchangée.

Exercice n°10 : Une entreprise fabrique deux types de produits P_1 et P_2 .

La matrice suivante donne le nombre d'heures nécessaires dans deux ateliers A_1 et A_2 pour fabriquer une unité de chaque produit :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Les quantités fabriquées pendant trois semaines sont données par la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

1. Préciser les dimensions de M et de Q .

↪ M a 2 lignes et 2 colonnes → M est de taille 2×2 .

↪ Q a 2 lignes et 3 colonnes (chaque colonne représente une semaine) → Q est de taille 2×3 .

2. Calculer le produit MQ .

$$MQ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$MQ = \begin{pmatrix} 2 \times 10 + 3 \times 5 & 2 \times 15 + 3 \times 8 & 2 \times 20 + 3 \times 12 \\ 1 \times 10 + 4 \times 5 & 1 \times 15 + 4 \times 8 & 1 \times 20 + 4 \times 12 \end{pmatrix}$$

$$MQ = \begin{pmatrix} 20 + 15 & 30 + 24 & 40 + 36 \\ 10 + 20 & 15 + 32 & 20 + 48 \end{pmatrix}$$

$$MQ = \begin{pmatrix} 35 & 54 & 76 \\ 30 & 47 & 68 \end{pmatrix}$$

3. Interpréter les coefficients de la matrice obtenue.

↪ Les **lignes** de MQ correspondent aux deux ateliers (A_1 en haut, A_2 en bas).

↪ Les **colonnes** de MQ correspondent aux trois semaines (Semaine 1, 2 et 3).

Chaque coefficient $(MQ)_{ij}$ représente le **nombre total d'heures de travail** effectuées dans l'atelier i pendant la semaine j .

Par exemple :

↪ Semaine 1 : 35 heures dans l'atelier A_1 et 30 heures dans l'atelier A_2 .

↪ Semaine 2 : 54 heures dans A_1 et 47 heures dans A_2 .

↪ Semaine 3 : 76 heures dans A_1 et 68 heures dans A_2 .