



Exercice n°1 : Dans chaque cas, déterminer si A est inversible et préciser A^{-1} le cas échéant.

- a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
- b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$
- d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice n°2 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et BA . Que peut-on en déduire sur ces deux matrices ?

Exercice n°3 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Supposons qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2$.

1. Effectuer le calcul AB .
2. Que peut-on en déduire quant à l'existence de B ?
3. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice n°4 : Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs matrices inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°5 : On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Effectuer les calculs AB et AC .
2. Pourquoi peut-on en déduire que la matrice A n'est pas inversible ?

Exercice n°6 : On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer N^2 et N^3 . Nest-elle inversible ?

Exercice n°7 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $5A - A^2$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice n°8 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 - A = 2I_3$ et en déduire que A est inversible.
Donner alors A^{-1} .

Exercice n°9 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 - 4A + 3I_3$ et en déduire que A est inversible.
Donner alors A^{-1} .

Exercice n°10 : À l'aide de la calculatrice (ou par le calcul), déterminer si A est inversible et préciser A^{-1} le cas échéant.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice n°11 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que B est l'inverse de A .
2. En déduire les solutions de l'équation $XA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice n°12 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est sa propre inverse.
2. En déduire les solutions de l'équation

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$



Correction

Exercice n°1 : Dans chaque cas, déterminer si A est inversible et préciser A^{-1} le cas échéant.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 2 \times 5 - 3 \times 4 = 10 - 12 = -2 \neq 0$ donc A inversible.

$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$ donc A n'est pas inversible.

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

$\det(A) = (-1) \times (-6) - 2 \times 3 = 6 - 6 = 0$ donc A n'est pas inversible.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1 \neq 0,$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice n°2 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Calculer AB et BA . Que peut-on en déduire sur ces deux matrices ?

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 3(-2) & 1(-3) + 3 \times 1 \\ 2 \times 7 + 7(-2) & 2(-3) + 7 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$BA = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 1 + (-3) \times 2 & 7 \times 3 + (-3) \times 7 \\ -2 \times 1 + 1 \times 2 & -2 \times 3 + 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

On a donc $AB = BA = I_2$: B est l'inverse de A (et réciproquement).

Exercice n°3 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Supposons qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2$.

1. Effectuer le calcul AB .

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}.$

2. Que peut-on en déduire quant à l'existence de B ?

Pour que $AB = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il faudrait que la première ligne soit $(1 \ 0)$, mais elle vaut $(0 \ 0)$. C'est impossible. Donc B n'existe pas.

3. La matrice A est-elle inversible ?

A n'est pas inversible.

Exercice n°4 : Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs matrices inverses.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = 3 \times 2 - 1 \times 5 = 1 \neq 0,$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\det(B) = (-2) \times (-1) - 1 \times 3 = 2 - 3 = -1 \neq 0,$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(C) = 1 \times 1 - 0 \times 2 = 1 \neq 0,$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°5 : On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Effectuer les calculs AB et AC .

$$AB = A \times I_3 = A.$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

On a donc $AB = AC$ avec $B \neq C$.

2. Pourquoi peut-on en déduire que la matrice A n'est pas inversible ?

Si A était inversible, on pourrait multiplier l'égalité $AB = AC$ à gauche par A^{-1} et obtenir $B = C$, contradiction.

Donc A n'est pas inversible.

Exercice n°6 : On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Calculer N^2 et N^3 . Nest-elle inversible ?

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nest nilpotente (car $N^3 = 0$ avec $N \neq 0$), donc elle n'est pas inversible (une matrice inversible ne peut pas être nilpotente).

Exercice n°7 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

Calculer $5A - A^2$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

$$5A = 5 \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 3 & 5 \times 1 \\ 5 \times 2 & 5 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \times 3) + (1 \times 2) & (3 \times 1) + (1 \times 2) \\ (2 \times 3) + (2 \times 2) & (2 \times 1) + (2 \times 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 2 & 3 + 2 \\ 6 + 4 & 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

$$5A - A^2 = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 11 & 5 - 5 \\ 10 - 10 & 10 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît $4I_2$:

$$5A - A^2 = 4I_2.$$

On écrit :

$$5A - A^2 = A(5I_2 - A).$$

Vérifions rapidement :

$$A(5I_2) = 5A \text{ et } A \times A = A^2, \text{ donc c'est bien juste.}$$

On a donc :

$$A(5I_2 - A) = 4I_2.$$

En divisant par 4 :

$$A \times \frac{1}{4}(5I_2 - A) = I_2.$$

Cela prouve que A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(5I_2 - A).$$

$$5I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$
$$5I_2 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 & 0-1 \\ 0-2 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Exercice n°8 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 - A = 2I_3$ et en déduire que A est inversible.

Donner alors A^{-1} .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

On en déduit $A(A - I_3) = 2I_3$, donc

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice n°9 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 - 4A + 3I_3$ et en déduire que A est inversible.

Donner alors A^{-1} .

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Étape 1 : Calcul de A^2

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 0 & 2 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 0 & 2 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 3 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 2 \times 2 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 3 \\ 0 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 2 + 3 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 0 + 3 \times 3 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 4 + 1 + 0 & 2 + 2 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 2 + 2 + 0 & 1 + 4 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Étape 2 : Calcul de $A^2 - 4A + 3I_3$

$$\begin{aligned} -4A &= \begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \text{ et } 3I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A^2 - 4A + 3I_3 &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A^2 - 4A + 3I_3 &= \begin{pmatrix} 5 - 8 + 3 & 4 - 4 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 4 - 4 + 0 & 5 - 8 + 3 & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 9 - 12 + 3 \end{pmatrix} \\ A^2 - 4A + 3I_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \end{aligned}$$

Étape 3 : A est inversible

On a donc :

$$A^2 - 4A + 3I_3 = 0_3 \Leftrightarrow A^2 - 4A = -3I_3$$

On factorise par A dans le membre de gauche :

$$A(A - 4I_3) = -3I_3$$

En divisant par -3 :

$$A \times \left(-\frac{1}{3}(A - 4I_3) \right) = I_3$$

C'est-à-dire :

$$A \times \left(\frac{1}{3}(4I_3 - A) \right) = I_3$$

Cette égalité montre que A est **inversible**, et que son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(4I_3 - A)$$

Étape 4 : Calcul de A^{-1}

$$4I_3 - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification (calcul de $A \times A^{-1}$)

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times (-1) + 0 \times 0 & 2 \times (-1) + 1 \times 2 + 0 \times 0 & 2 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 0 \times 0 & 1 \times (-1) + 2 \times 2 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 2 + 0 \times (-1) + 3 \times 0 & 0 \times (-1) + 0 \times 2 + 3 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 0 + 3 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-1+0 & -2+2+0 & 0 \\ 2-2+0 & -1+4+0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3$$

On retrouve bien I_3 .

Exercice n°10 : À l'aide de la calculatrice (ou par le calcul), déterminer si A est inversible et préciser A^{-1} le cas échéant.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 1(5 \times 4 - 3 \times 3) - 2(2 \times 4 - 3 \times 1) + 1(2 \times 3 - 5 \times 1) = 1 \times (20 - 9) - 2 \times (8 - 3) + (6 - 5) = 11 - 10 + 1 = 2 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

Son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & -5 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Les trois lignes sont proportionnelles (la deuxième est $2 \times$ la première, la troisième est $3 \times$ la première), donc le déterminant est nul. A n'est pas inversible.

Exercice n°11 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que B est l'inverse de A .

Calculons AB :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-3) \times 0 + 2 \times 0 & 1 \times 3 + (-3) \times 1 + 2 \times 0 & 1 \times (-14) + (-3) \times (-4) + 2 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 + 4 \times 0 & 0 \times 3 + 1 \times 1 + 4 \times 0 & 0 \times (-14) + 1 \times (-4) + 4 \times 1 \\ 0 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 & 0 \times 3 + 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times (-14) + 0 \times (-4) + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} 1-0+0 & 3-3+0 & -14+12+2 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0-4+4 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \end{aligned}$$

Calculons maintenant BA :

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 3 \times 0 + (-14) \times 0 & 1 \times (-3) + 3 \times 1 + (-14) \times 0 & 1 \times 2 + 3 \times 4 + (-14) \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 + (-4) \times 0 & 0 \times (-3) + 1 \times 1 + (-4) \times 0 & 0 \times 2 + 1 \times 4 + (-4) \times 1 \\ 0 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 & 0 \times (-3) + 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 2 + 0 \times 4 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 1+0+0 & -3+3+0 & 2+12-14 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+4-4 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \end{aligned}$$

Comme $AB = BA = I_3$, la matrice A est inversible et $A^{-1} = B$.

2. En déduire les solutions de l'équation $XA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Posons $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de taille 2×3 . Pour que XA existe et soit égale à C (matrice 2×3), la matrice X doit être de taille 2×3 (car A est 3×3).

Comme A est inversible : $XA = C \Leftrightarrow (XA)A^{-1} = CA^{-1} \Leftrightarrow X = CA^{-1} = CB$.

Il y a donc **une unique solution** : $X = CB$.

Calculons CB :

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 & 2 \times 3 + 1 \times 1 + 0 \times 0 & 2 \times (-14) + 1 \times (-4) + 0 \times 1 \\ -1 \times 1 + 3 \times 0 + 5 \times 0 & -1 \times 3 + 3 \times 1 + 5 \times 0 & -1 \times (-14) + 3 \times (-4) + 5 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 2 + 0 + 0 & 6 + 1 + 0 & -28 - 4 + 0 \\ -1 + 0 + 0 & -3 + 3 + 0 & 14 - 12 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -32 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -32 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice n°12 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est sa propre inverse.

Calculons $A^2 = A \times A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} (-1) \times (-1) + 0 \times 4 + 0 \times 2 & (-1) \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 & (-1) \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times (-1) \\ 4 \times (-1) + 1 \times 4 + 0 \times 2 & 4 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 & 4 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) \\ 2 \times (-1) + 1 \times 4 + (-1) \times 2 & 2 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 & 2 \times 0 + 1 \times 0 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ -4 + 4 + 0 & 0 + 1 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ -2 + 4 - 2 & 0 + 1 - 1 & 0 + 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

2. En déduire les solutions de l'équation

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, matrice de taille 3×2 . La matrice X doit donc être de taille 3×2 .

Comme A est inversible : $AX = C \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}C \Leftrightarrow X = A^{-1}C = AC$.

Il y a donc **une unique solution** : $X = AC$.

Calculons AC :

$$AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} (-1) \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 3 & (-1) \times 2 + 0 \times (-1) + 0 \times 1 \\ 4 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 3 & 4 \times 2 + 1 \times (-1) + 0 \times 1 \\ 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 3 & 2 \times 2 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -1 + 0 + 0 & -2 + 0 + 0 \\ 4 + 0 + 0 & 8 - 1 + 0 \\ 2 + 0 - 3 & 4 - 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$