



Exercice n°1 : Soit l'équation

$$(E): 5x + 3y = 4.$$

1. Dire pourquoi l'équation (E) admet des solutions entières.
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

Exercice n°2 : Soit l'équation

$$(E): 12x + 7y = 3.$$

1. Déterminer une solution particulière de l'équation : $12x + 7y = 1$.
2. En déduire une solution particulière de (E).
3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

Exercice n°3 : Soit l'équation

$$(E): 41x - 17y = 1.$$

1. Dire pourquoi l'équation (E) admet des solutions entières.
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

Exercice n°4 : Soit l'équation

$$(E): 23x - 11y = 5.$$

1. Dire pourquoi l'équation (E) admet des solutions entières.
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

Exercice n°5 :

1. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$, solutions de l'équation (E): $9x - 4y = 5$.
2. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p ; q)$ de nombres entiers vérifiant : $m = 9p + 2$ et $m = 4q + 7$. Montrer que le couple $(p ; q)$ est solution de l'équation (E).
3. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 1 000.

Exercice n°6 :

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:

$$5x - 3y = 2.$$

- a) Vérifier que $(1 ; 1)$ est solution de (E).
 - b) Déterminer les couples solutions de (E).
2. Une boîte contient 30 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 30 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $5x - 3y = 2$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?



Correction

Exercice n°1 : Soit l'équation

$$(E): 5x + 3y = 4.$$

1. Dire pourquoi l'équation (E) admet des solutions entières.

5 et 3 sont premiers entre eux $\text{PGCD}(5, 3) = 1$, et 1 divise 4. Donc d'après le théorème de Bézout, l'équation (E) admet des solutions entières.

2. Déterminer une solution particulière de (E).

Cherchons un couple solution évident : pour $x = 2, y = -2$:

$$5 \times 2 + 3 \times (-2) = 10 - 6 = 4.$$

Le couple $(2; -2)$ est solution particulière de (E).

3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

Soit $(x; y)$ une solution quelconque de (E).

Comme $(2; -2)$ est aussi solution de (E), on a :

$$5x + 3y = 5 \times 2 + 3 \times (-2) \Leftrightarrow 5(x - 2) = -3(y + 2) = 3(-y - 2).$$

3 divise $5(x - 2)$, or 3 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $(x - 2)$.

Donc $x - 2 = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant : $5 \times 3k = -3(y + 2)$, donc en divisant par 3 : $5k = -(y + 2)$, soit $y = -2 - 5k$.

L'ensemble des couples solutions est de la forme :

$$\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -2 - 5k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Exercice n°2 : Soit l'équation

$$(E): 12x + 7y = 3.$$

1. Déterminer une solution particulière de l'équation : $12x + 7y = 1$.

Cherchons un couple solution de $12x + 7y = 1$ par tâtonnement (algorithme d'Euclide ou essais) :

Pour $x = 3, y = -5$:

$$12 \times 3 + 7 \times (-5) = 36 - 35 = 1.$$

Le couple $(3; -5)$ est solution particulière de $12x + 7y = 1$.

2. En déduire une solution particulière de (E).

En multipliant par 3 : $12 \times 9 + 7 \times (-15) = 3$.

Donc le couple $(9; -15)$ est une solution particulière de (E).

3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

Soit $(x; y)$ une solution quelconque de (E).

Comme $(9; -15)$ est aussi solution de (E), on a :

$$12x + 7y = 12 \times 9 + 7 \times (-15) \Leftrightarrow 12(x - 9) = -7(y + 15) = 7(-y - 15).$$

7 divise $12(x - 9)$, or 7 et 12 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 7 divise $(x - 9)$.

Donc $x - 9 = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant : $12 \times 7k = -7(y + 15)$, donc en divisant par 7 : $12k = -(y + 15)$, soit $y = -15 - 12k$.

L'ensemble des couples solutions est de la forme :

$$\begin{cases} x = 9 + 7k \\ y = -15 - 12k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Exercice n°3 : Soit l'équation

$$(E): 41x - 17y = 1.$$

1. Dire pourquoi l'équation (E) admet des solutions entières.

41 et 17 sont premiers entre eux (on peut le vérifier par l'algorithme d'Euclide : $41 = 2 \times 17 + 7$; $17 = 2 \times 7 + 3$; $7 = 2 \times 3 + 1$; $3 = 3 \times 1$, donc PGCD = 1. D'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que $41x - 17y = 1$.

2. Déterminer une solution particulière de (E).

Remontons l'algorithme d'Euclide :

$$1 = 7 - 2 \times 3$$

$$3 = 17 - 2 \times 7 \Rightarrow 1 = 7 - 2(17 - 2 \times 7) = 5 \times 7 - 2 \times 17$$

$$7 = 41 - 2 \times 17 \Rightarrow 1 = 5(41 - 2 \times 17) - 2 \times 17 = 5 \times 41 - 12 \times 17$$

Le couple $(5 ; 12)$ est solution car : $41 \times 5 - 17 \times 12 = 205 - 204 = 1$.

3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

Soit $(x ; y)$ une solution quelconque de (E).

Comme $(5 ; 12)$ est aussi solution de (E), on a :

$$41x - 17y = 41 \times 5 - 17 \times 12 \Leftrightarrow 41(x - 5) = 17(y - 12).$$

17 divise $41(x - 5)$, or 41 et 17 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 17 divise $(x - 5)$.

Donc $x - 5 = 17k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant : $41 \times 17k = 17(y - 12)$, donc en divisant par 17 : $y - 12 = 41k$.

L'ensemble des couples solutions est de la forme :

$$\begin{cases} x = 5 + 17k \\ y = 12 + 41k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Exercice n°4 : Soit l'équation

$$(E): 23x - 11y = 5.$$

1. Dire pourquoi l'équation (E) admet des solutions entières.

23 et 11 sont premiers entre eux (23 est premier, il ne divise pas 11). Donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que $23x - 11y = 1$, et en multipliant par 5, l'équation (E) admet des solutions entières.

2. Déterminer une solution particulière de (E).

Cherchons d'abord une solution de $23x - 11y = 1$:

$$23 = 2 \times 11 + 1, \text{ donc } 1 = 23 - 2 \times 11.$$

Le couple $(1 ; 2)$ vérifie $23 \times 1 - 11 \times 2 = 23 - 22 = 1$.

En multipliant par 5 : $23 \times 5 - 11 \times 10 = 5$.

Le couple $(5 ; 10)$ est une solution particulière de (E).

3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de (E).

Soit $(x ; y)$ une solution quelconque de (E).

Comme $(5 ; 10)$ est aussi solution de (E), on a :

$$23x - 11y = 23 \times 5 - 11 \times 10 \Leftrightarrow 23(x - 5) = 11(y - 10).$$

11 divise $23(x - 5)$, or 23 et 11 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 11 divise $(x - 5)$.

Donc $x - 5 = 11k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant : $23 \times 11k = 11(y - 10)$, donc en divisant par 11 : $y - 10 = 23k$.

L'ensemble des couples solutions est de la forme :

$$\begin{cases} x = 5 + 11k \\ y = 10 + 23k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Exercice n°5 :

1. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$, solutions de l'équation (E): $9x - 4y = 5$.

9 et 4 sont premiers entre eux. Une solution évidente de $9x - 4y = 1$ est $(1 ; 2)$ car $9 - 8 = 1$.

En multipliant par 5 : $9 \times 5 - 4 \times 10 = 5$, donc $(5 ; 10)$ est solution particulière de (E).

Soit $(x ; y)$ une solution quelconque de (E) :

$$9x - 4y = 9 \times 5 - 4 \times 10 \Leftrightarrow 9(x - 5) = 4(y - 10).$$

4 divise $9(x - 5)$, or 9 et 4 sont premiers entre eux, donc d'après Gauss, 4 divise $(x - 5)$.

Donc $x - 5 = 4k, k \in \mathbb{Z}$, et en remplaçant : $y - 10 = 9k$.

$$\begin{cases} x = 5 + 4k \\ y = 10 + 9k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p ; q)$ de nombres entiers vérifiant : $m = 9p + 2$ et $m = 4q + 7$. Montrer que le couple $(p ; q)$ est solution de l'équation (E).

On a $m = 9p + 2$ et $m = 4q + 7$, donc $9p + 2 = 4q + 7$, soit : $9p - 4q = 5$.

Le couple $(p ; q)$ vérifie donc bien l'équation (E) : $9p - 4q = 5$.

3. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 1 000.

D'après la question 1, avec $x = p$ et $y = q$:

$$p = 5 + 4k, q = 10 + 9k, k \in \mathbb{Z}.$$

On a $m = 9p + 2 = 9(5 + 4k) + 2 = 45 + 36k + 2 = 47 + 36k$.

On veut $m > 1000$, donc $47 + 36k > 1000 \Leftrightarrow 36k > 953 \Leftrightarrow k > 26,47\dots$

Le plus petit entier k convenable est $k = 27$.

On obtient alors : $m = 47 + 36 \times 27 = 47 + 972 = 1019$.

Le plus petit nombre m cherché est 1019.

Exercice n°6 :

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$:

$$5x - 3y = 2.$$

a) Vérifier que $(1 ; 1)$ est solution de (E).

$5 \times 1 - 3 \times 1 = 5 - 3 = 2$. Le couple $(1 ; 1)$ est bien solution de (E).

b) Déterminer les couples solutions de (E).

Soit $(x ; y)$ une solution quelconque de (E). Comme $(1 ; 1)$ est aussi solution de (E) :

$$5x - 3y = 5 \times 1 - 3 \times 1 \Leftrightarrow 5(x - 1) = 3(y - 1).$$

3 divise $5(x - 1)$, or 5 et 3 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $(x - 1)$.

Donc $x - 1 = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant : $5 \times 3k = 3(y - 1)$, donc en divisant par 3 : $y - 1 = 5k$.

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 1 + 5k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Une boîte contient 30 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 30 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $5x - 3y = 2$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

On doit avoir $x \geq 0, y \geq 0$ et $x + y \leq 30$ (car il y a aussi des jetons blancs, en nombre positif ou nul).

Avec $x = 1 + 3k \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{3}$, donc $k \geq 0$.

Avec $y = 1 + 5k \geq 0$, déjà vérifié pour $k \geq 0$.

De plus $x + y = 1 + 3k + 1 + 5k = 2 + 8k \leq 30 \Rightarrow 8k \leq 28 \Rightarrow k \leq 3,5$, donc $k \leq 3$.

Donc $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$, ce qui donne :

k	$x(\text{rouges})$	$y(\text{verts})$	blancs ($30 - x - y$)
0	1	1	28
1	4	6	20
2	7	11	12
3	10	16	4

Il y a donc **4 répartitions possibles** des jetons rouges, verts et blancs.