

**Exercice n°1 :**

1. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ tels que : $17x - 21y = 0$.
2. En déduire les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ tels que : $17x + 21y = 4$.

Exercice n°2 :

1. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ tels que : $9(x + 2) = 11(y - 1)$.
2. En déduire les entiers relatifs x tels que : $9x \equiv -18 \pmod{11}$.

Exercice n°3 : Montrer que si $x \equiv 0 \pmod{4}$, $x \equiv 0 \pmod{9}$ et $x \equiv 0 \pmod{25}$ alors $x \equiv 0 \pmod{900}$.

Exercice n°4 : Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6.

Exercice n°5 :

1. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(a ; b)$ tels que : $23a - 17b = 0$.
 2. Vérifier que le couple $(3 ; 4)$ est solution de l'équation (E) : $23x - 17y = 1$.
- En déduire les couples $(x ; y)$ solutions de (E).

Exercice n°6 : On considère dans un repère, les points $A(4 ; 5)$ et $B(-6 ; -1)$.

1. Montrer qu'un point $M(x ; y)$ appartient à la droite (AB) si $3(x - 4) = 5(y - 5)$.
2. En déduire l'ensemble des points à coordonnées entières appartenant à la droite (AB) .

Exercice n°7 : Un joueur a totalisé 168 points en lançant sur une cible 30 fléchettes.

La cible possède 3 zones qui rapportent respectivement 0 ; 6 et 13 points.

1. Montrer que le nombre de fléchettes qui ont atteint la zone à 13 points est divisible par 6.
2. En déduire la répartition des fléchettes dans les différentes zones.



Correction

Exercice n°1 :

1. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ tels que : $17x - 21y = 0$.

On a $17x = 21y$, donc 21 divise $17x$.

Comme 17 et 21 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 21 divise x .

On a alors : $x = 21k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant dans l'équation : $17 \times 21k = 21y$.

En divisant par 21 : $y = 17k$.

Les solutions sont donc de la forme :

$$\begin{cases} x = 21k \\ y = 17k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. En déduire les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ tels que : $17x + 21y = 4$.

On cherche une solution particulière de $17x + 21y = 4$.

D'après l'algorithme d'Euclide : $1 = 5 \times 17 - 4 \times 21$

Donc : $4 = 20 \times 17 - 16 \times 21 = 17 \times 20 + 21 \times (-16)$

Ainsi $(x_0 ; y_0) = (20 ; -16)$ est une solution particulière.

Soit $(x ; y)$ une solution quelconque. La différence entre deux solutions vérifie l'équation homogène : $17(x - x_0) + 21(y - y_0) = 0$

c'est-à-dire : $17(x - 20) + 21(y + 16) = 0$

ou encore : $17(x - 20) = -21(y + 16)$

Donc 21 divise $17(x - 20)$. Comme $\text{PGCD}(17 ; 21) = 1$, le théorème de Gauss donne : $21 \mid (x - 20)$

Posons $x - 20 = 21k, k \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$17 \times 21k = -21(y + 16) \Rightarrow 17k = -(y + 16) \Rightarrow y = -16 - 17k$$

Les solutions sont donc : $(x ; y) = (20 + 21k ; -16 - 17k), k \in \mathbb{Z}$

Vérification : $17(20 + 21k) + 21(-16 - 17k) = 340 + 357k - 336 - 357k = 4$

Exercice n°2 :

1. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ tels que : $9(x + 2) = 11(y - 1)$.

$9(x + 2) = 11(y - 1)$ donc 11 divise $9(x + 2)$.

Comme 9 et 11 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 11 divise $(x + 2)$.

On a alors : $x + 2 = 11k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant dans l'équation : $9 \times 11k = 11(y - 1)$.

En divisant par 11 : $y - 1 = 9k$, soit $y = 1 + 9k$.

Les solutions sont donc de la forme :

$$\begin{cases} x = -2 + 11k \\ y = 1 + 9k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vérification : $9(-2 + 11k + 2) = 9 \times 11k = 99k$ et $11(1 + 9k - 1) = 11 \times 9k = 99k$

2. En déduire les entiers relatifs x tels que : $9x \equiv -18 \pmod{11}$.

$9x \equiv -18 \pmod{11} \Leftrightarrow 9x + 18 \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow 9(x + 2) \equiv 0 \pmod{11}$.

Cela signifie qu'il existe un entier y tel que $9(x + 2) = 11y$, soit $9(x + 2) = 11(y - 1) + 11$, donc on retrouve (à un ajustement près) la même forme.

Plus simplement : $9x \equiv -18 \pmod{11} \Leftrightarrow 9(x + 2) \equiv 0 \pmod{11}$. Comme 9 et 11 sont premiers entre eux, on peut « diviser » : $x + 2 \equiv 0 \pmod{11}$, donc $x \equiv -2 \pmod{11}$, soit $x \equiv 9 \pmod{11}$.

Les entiers cherchés sont donc les $x = -2 + 11k, k \in \mathbb{Z}$, ce qui correspond exactement aux valeurs de x trouvées à la question 1.

Exercice n°3 : Montrer que si $x \equiv 0 \pmod{4}$, $x \equiv 0 \pmod{9}$ et $x \equiv 0 \pmod{25}$ alors $x \equiv 0 \pmod{900}$.

Si $x \equiv 0 \pmod{4}$ et $x \equiv 0 \pmod{9}$ alors 4 et 9 divisent x .

Comme 4 et 9 sont premiers entre eux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $4 \times 9 = 36$ divise x , donc $x \equiv 0 \pmod{36}$.

On a alors $x \equiv 0 \pmod{36}$ et $x \equiv 0 \pmod{25}$, donc 36 et 25 divisent x .

Comme 36 et 25 sont premiers entre eux (25 n'a que 5 comme facteur premier, 36 a 2 et 3), d'après le corollaire du théorème de Gauss, $36 \times 25 = 900$ divise x .

Donc $x \equiv 0 \pmod{900}$.

Exercice n°4 : Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6.

Montrons d'abord que $n(n^2 + 5)$ est divisible par 2, puis par 3.

Divisibilité par 2 :

Si n est pair, alors $n(n^2 + 5)$ est pair.

Si n est impair, alors n^2 est impair, donc $n^2 + 5$ est pair (impair + impair), donc $n(n^2 + 5)$ est pair.

Dans tous les cas, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 2.

Divisibilité par 3 :

On étudie les restes possibles de n modulo 3 :

Si $n \equiv 0 \pmod{3}$: alors $n(n^2 + 5) \equiv 0 \pmod{3}$.

Si $n \equiv 1 \pmod{3}$: alors $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$, donc $n^2 + 5 \equiv 6 \equiv 0 \pmod{3}$, donc $n(n^2 + 5) \equiv 0 \pmod{3}$.

Si $n \equiv 2 \pmod{3}$: alors $n^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$, donc $n^2 + 5 \equiv 6 \equiv 0 \pmod{3}$, donc $n(n^2 + 5) \equiv 0 \pmod{3}$.

Dans tous les cas, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

Conclusion :

$n(n^2 + 5)$ est divisible par 2 et par 3. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $n(n^2 + 5)$ est divisible par $2 \times 3 = 6$.

Exercice n°5 :

1. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(a ; b)$ tels que : $23a - 17b = 0$.

$23a = 17b$ donc 17 divise $23a$.

Comme 23 et 17 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 17 divise a .

Donc $a = 17k$, $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant : $23 \times 17k = 17b$, donc $b = 23k$.

$$\begin{cases} a = 17k \\ b = 23k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Vérifier que le couple $(3 ; 4)$ est solution de l'équation (E) : $23x - 17y = 1$.

En déduire les couples $(x ; y)$ solutions de (E).

Vérification : $23 \times 3 - 17 \times 4 = 69 - 68 = 1$. Le couple $(3 ; 4)$ est bien solution de (E).

Soit $(x ; y)$ une solution de (E). On a :

$$23x - 17y = 1 = 23 \times 3 - 17 \times 4$$

$$23(x - 3) = 17(y - 4)$$

17 divise $23(x - 3)$. Comme 23 et 17 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 17 divise $(x - 3)$.

Donc $x - 3 = 17k$, soit $x = 3 + 17k$, $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant : $23 \times 17k = 17(y - 4)$, donc $y - 4 = 23k$, soit $y = 4 + 23k$.

Réciproquement, vérifions : $23(3 + 17k) - 17(4 + 23k) = 69 + 391k - 68 - 391k = 1$. ✓

Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} x = 3 + 17k \\ y = 4 + 23k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Exercice n°6 : On considère dans un repère, les points $A(4 ; 5)$ et $B(-6 ; -1)$.

1. Montrer qu'un point $M(x ; y)$ appartient à la droite (AB) si $3(x - 4) = 5(y - 5)$.

Un point $M(x ; y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AM}(x - 4 ; y - 5) \text{ et } \overrightarrow{AB}(-6 - 4 ; -1 - 5) = (-10 ; -6).$$

La colinéarité s'écrit : $(x - 4) \times (-6) - (y - 5) \times (-10) = 0$

$$-6(x - 4) + 10(y - 5) = 0$$

En divisant par -2 : $3(x - 4) - 5(y - 5) = 0$, soit $3(x - 4) = 5(y - 5)$.

2. En déduire l'ensemble des points à coordonnées entières appartenant à la droite (AB) .

$$3(x - 4) = 5(y - 5) \text{ donc } 5 \text{ divise } 3(x - 4).$$

Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $(x - 4)$.

$$\text{Donc } x - 4 = 5k, \text{ soit } x = 4 + 5k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{En remplaçant : } 3 \times 5k = 5(y - 5), \text{ donc } y - 5 = 3k, \text{ soit } y = 5 + 3k.$$

$$\text{Vérification : } 3(4 + 5k - 4) = 15k \text{ et } 5(5 + 3k - 5) = 15k.$$

Les points à coordonnées entières de la droite (AB) sont les points $M_k(4 + 5k ; 5 + 3k), k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°7 : Un joueur a totalisé 168 points en lançant sur une cible 30 fléchettes.

La cible possède 3 zones qui rapportent respectivement 0 ; 6 et 13 points.

1. Montrer que le nombre de fléchettes qui ont atteint la zone à 13 points est divisible par 6.

Notons a, b, c les nombres de fléchettes ayant respectivement atteint les zones à 0, 6 et 13 points.

On a :

$$\begin{cases} a + b + c = 30 \\ 6b + 13c = 168 \end{cases}$$

De la première équation : $b = 30 - a - c$. En remplaçant dans la deuxième :

$$6(30 - a - c) + 13c = 168$$

$$180 - 6a - 6c + 13c = 168$$

$$7c - 6a = -12$$

$$6a = 7c + 12$$

$$6a - 7c = 12$$

$6a = 7c + 12$, donc 6 divise $7c + 12$, donc 6 divise $7c$ (car 6 divise 12).

Comme 6 et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 6 divise c .

2. En déduire la répartition des fléchettes dans les différentes zones.

$$\text{Donc } c = 6k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{En remplaçant : } 6a = 7 \times 6k + 12 = 42k + 12, \text{ donc } a = 7k + 2.$$

$$\text{Or } b = 30 - a - c = 30 - (7k + 2) - 6k = 28 - 13k.$$

Il faut $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$:

$$\Leftrightarrow a = 7k + 2 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{2}{7} \Rightarrow k \geq 0 \text{ (car } k \text{ entier)}$$

$$\Leftrightarrow c = 6k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b = 28 - 13k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{28}{13} \approx 2,15 \Rightarrow k \leq 2$$

Donc $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

$$\Leftrightarrow \text{Si } k = 0 : a = 2, b = 28, c = 0. \text{ Vérification : } 2 + 28 + 0 = 30 \text{ et } 6 \times 28 + 13 \times 0 = 168.$$

$$\Leftrightarrow \text{Si } k = 1 : a = 9, b = 15, c = 6. \text{ Vérification : } 9 + 15 + 6 = 30 \text{ et } 6 \times 15 + 13 \times 6 = 90 + 78 = 168.$$

$$\Leftrightarrow \text{Si } k = 2 : a = 16, b = 2, c = 12. \text{ Vérification : } 16 + 2 + 12 = 30 \text{ et } 6 \times 2 + 13 \times 12 = 12 + 156 = 168.$$

Il y a donc trois répartitions possibles :

k	Zone 0 pt	Zone 6 pts	Zone 13 pts
0	2	28	0
1	9	15	6
2	16	2	12