

**Exercice n°1 :**

1. Montrer que 73 et 31 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que : $73x + 31y = 1$.

Exercice n°2 :

1. Montrer que 47 et 18 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que : $47x - 18y = 1$.

Exercice n°3 :

1. Montrer que 56 et 45 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que : $56x + 45y = 1$.
3. En déduire une solution de l'équation $56x + 45y = 3$.

Exercice n°4 : Démontrer que, pour tout entier naturel n , les entiers $(9n + 5)$ et $(7n + 4)$ sont premiers entre eux.

Exercice n°5 : Démontrer que, pour tout entier relatif n , les entiers $(11n + 4)$ et $(8n + 3)$ sont premiers entre eux. En déduire PGCD(48; 35).

Exercice n°6 : Prouver que la fraction $\frac{n+1}{3n+2}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

Exercice n°7 : Prouver que la fraction $\frac{5n+2}{15n+7}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

Exercice n°8 : Pour quelles valeurs de n , entier naturel, la fraction $\frac{3n+1}{n(n+1)}$ est-elle irréductible ?
On prendra $n \geq 1$, afin que le dénominateur soit non nul.

Exercice n°9 : Déterminer les entiers a et b tels que, pour tout entier n :

$$n^2 - 5 + (an + b)(n - 3) = 4$$

Que peut-on en déduire pour la fraction $\frac{n^2-5}{n-3}$?

Exercice n°10 : Déterminer les entiers a et b tels que, pour tout entier n :

$$n^2 + 1 + (an + b)(n + 1) = 2$$

Que peut-on en déduire pour la fraction $\frac{n^2+1}{n+1}$?

Exercice n°11 : Prouver que la fraction $\frac{n^3+2n}{3n^2+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n ... si c'est le cas. Sinon, préciser les valeurs de n pour lesquelles elle l'est.

Exercice n°12 :

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , les entiers n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , les entiers n^2 et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
3. En déduire que la fraction $\frac{n^2+n}{2n+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n .



Correction

Exercice n°1 :

1. Montrer que 73 et 31 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

On applique l'algorithme d'Euclide :

$$73 = 31 \times 2 + 11 \quad (L_1)$$

$$31 = 11 \times 2 + 9 \quad (L_2)$$

$$11 = 9 \times 1 + 2 \quad (L_3)$$

$$9 = 2 \times 4 + 1 \quad (L_4)$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non nul est 1, donc $\text{PGCD}(73; 31) = 1$: les nombres 73 et 31 sont premiers entre eux.

2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que : $73x + 31y = 1$

On remonte l'algorithme d'Euclide, de (L_4) jusqu'à (L_1) .

De (L_4) : $9 - 2 \times 4 = 1 \quad (L_5)$

Pour utiliser (L_3) , on écrit $2 = 11 - 9$ et on remplace dans (L_5) :

$$9 - 4(11 - 9) = 1$$

$$9 \times 5 - 11 \times 4 = 1 \quad (L_6)$$

Pour utiliser (L_2) , on écrit $9 = 31 - 11 \times 2$ et on remplace dans (L_6) :

$$5(31 - 11 \times 2) - 11 \times 4 = 1$$

$$31 \times 5 - 11 \times 14 = 1 \quad (L_7)$$

Enfin, de (L_1) on tire $11 = 73 - 31 \times 2$ que l'on remplace dans (L_7) :

$$31 \times 5 - 14(73 - 31 \times 2) = 1$$

$$31 \times 5 - 73 \times 14 + 31 \times 28 = 1$$

$$73 \times (-14) + 31 \times 33 = 1$$

On obtient donc le couple d'entiers de Bézout $(x; y) = (-14; 33)$.

Vérification : $73 \times (-14) + 31 \times 33 = -1022 + 1023 = 1$.

Exercice n°2 :

1. Montrer que 47 et 18 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Algorithme d'Euclide :

$$47 = 18 \times 2 + 11 \quad (L_1)$$

$$18 = 11 \times 1 + 7 \quad (L_2)$$

$$11 = 7 \times 1 + 4 \quad (L_3)$$

$$7 = 4 \times 1 + 3 \quad (L_4)$$

$$4 = 3 \times 1 + 1 \quad (L_5)$$

$$3 = 1 \times 3 + 0$$

Le dernier reste non nul est 1, donc $\text{PGCD}(47; 18) = 1$.

2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que : $47x - 18y = 1$.

On remonte l'algorithme depuis (L_5) :

De (L_5) : $4 - 3 = 1$

De (L_4) , $3 = 7 - 4$: $4 - (7 - 4) = 1$, soit $4 \times 2 - 7 = 1$

De (L_3) , $4 = 11 - 7$: $2(11 - 7) - 7 = 1$, soit $11 \times 2 - 7 \times 3 = 1$

De (L_2) , $7 = 18 - 11$: $11 \times 2 - 3(18 - 11) = 1$, soit $11 \times 5 - 18 \times 3 = 1$

De (L_1) , $11 = 47 - 18 \times 2$: $5(47 - 18 \times 2) - 18 \times 3 = 1$

$$47 \times 5 - 18 \times 10 - 18 \times 3 = 1$$

$$47 \times 5 - 18 \times 13 = 1$$

L'égalité demandée étant $47x - 18y = 1$, on obtient $(x; y) = (5; 13)$.

Vérification : $47 \times 5 - 18 \times 13 = 235 - 234 = 1$.

Exercice n°3 :

1. Montrer que 56 et 45 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Algorithme d'Euclide :

$$56 = 45 \times 1 + 11 \quad (L_1)$$

$$45 = 11 \times 4 + 1 \quad (L_2)$$

$$11 = 1 \times 11 + 0$$

Le dernier reste non nul est 1, donc $\text{PGCD}(56; 45) = 1$: 56 et 45 sont premiers entre eux.

2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs $(x; y)$ tel que : $56x + 45y = 1$.

$$\text{De } (L_2): 45 - 11 \times 4 = 1$$

$$\text{De } (L_1), 11 = 56 - 45:$$

$$45 - 4(56 - 45) = 1$$

$$45 - 56 \times 4 + 45 \times 4 = 1$$

$$56 \times (-4) + 45 \times 5 = 1$$

Un couple d'entiers de Bézout est $(x; y) = (-4; 5)$.

3. En déduire une solution de l'équation $56x + 45y = 3$.

$$\text{En multipliant l'égalité précédente par 3 : } 56 \times (-12) + 45 \times 15 = 3$$

Une solution est donc $(x; y) = (-12; 15)$.

Exercice n°4 : Démontrer que, pour tout entier naturel n , les entiers $(9n + 5)$ et $(7n + 4)$ sont premiers entre eux.

On cherche une combinaison linéaire de $(9n + 5)$ et $(7n + 4)$ égale à 1, c'est-à-dire des entiers u et v (indépendants de n) permettant « d'éliminer n ».

Le coefficient de n dans $u(9n + 5) + v(7n + 4)$ est $9u + 7v$: on veut $9u + 7v = 0$, ce qui suggère $u = 7$ et $v = -9$.

$$\text{Calculons alors : } 7(9n + 5) - 9(7n + 4) = 63n + 35 - 63n - 36 = -1$$

$$\text{Donc : } -7(9n + 5) + 9(7n + 4) = 1$$

Il existe donc un couple d'entiers $(u; v) = (-7; 9)$ tel que $(9n + 5)u + (7n + 4)v = 1$.

D'après le théorème de Bézout, pour tout entier naturel n , les nombres $(9n + 5)$ et $(7n + 4)$ sont premiers entre eux.

Exercice n°5 : Démontrer que, pour tout entier relatif n , les entiers $(11n + 4)$ et $(8n + 3)$ sont premiers entre eux. En déduire $\text{PGCD}(48; 35)$.

Première partie. On cherche u et v entiers tels que $u(11n + 4) + v(8n + 3) = 1$.

Pour éliminer n , on choisit $u = 8$ et $v = -11$:

$$8(11n + 4) - 11(8n + 3) = 88n + 32 - 88n - 33 = -1$$

$$\text{Donc : } (-8)(11n + 4) + 11(8n + 3) = 1$$

D'après le théorème de Bézout, pour tout entier relatif n , $(11n + 4)$ et $(8n + 3)$ sont premiers entre eux.

Deuxième partie. Pour $n = 4$:

$$11 \times 4 + 4 = 48$$

$$8 \times 4 + 3 = 35$$

Ces deux entiers étant de la forme précédente, ils sont premiers entre eux : $\text{PGCD}(48; 35) = 1$

Exercice n°6 : Prouver que la fraction $\frac{n+1}{3n+2}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

On cherche donc une combinaison linéaire de $(n + 1)$ et $(3n + 2)$ égale à 1.

Pour éliminer n , on multiplie $(n + 1)$ par 3 et $(3n + 2)$ par -1 :

$$3(n + 1) - (3n + 2) = 3n + 3 - 3n - 2 = 1$$

Il existe donc un couple d'entiers $(u ; v) = (3 ; -1)$ tel que : $(n + 1)u + (3n + 2)v = 1$

D'après le théorème de Bézout, $(n + 1)$ et $(3n + 2)$ sont premiers entre eux pour tout entier naturel n .

Par conséquent, la fraction $\frac{n+1}{3n+2}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

Exercice n°7 : Prouver que la fraction $\frac{5n+2}{15n+7}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

On cherche une combinaison linéaire de $(5n + 2)$ et $(15n + 7)$ égale à 1.

Pour éliminer n : on multiplie $(5n + 2)$ par -3 et $(15n + 7)$ par 1:

$$-3(5n + 2) + 1 \times (15n + 7) = -15n - 6 + 15n + 7 = 1$$

Il existe donc un couple d'entiers $(u ; v) = (-3 ; 1)$ tel que : $(5n + 2)u + (15n + 7)v = 1$

D'après le théorème de Bézout, $\text{PGCD}(5n + 2 ; 15n + 7) = 1$: ces deux entiers sont premiers entre eux.

La fraction $\frac{5n+2}{15n+7}$ est donc irréductible pour tout entier naturel n .

Exercice n°8 : Pour quelles valeurs de n , entier naturel, la fraction $\frac{3n+1}{n(n+1)}$ est-elle irréductible ?

On prendra $n \geq 1$, afin que le dénominateur soit non nul.

La fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux, c'est-à-dire si

$$\text{PGCD}(3n + 1 ; n(n + 1)) = 1.$$

Comme n et $n + 1$ sont premiers entre eux, on étudie séparément les nombres $3n + 1$ et n , puis $3n + 1$ et $n + 1$.

Étude avec n

On a : $(3n + 1) - 3n = 1$.

D'après le théorème de Bézout, $\text{PGCD}(3n + 1 ; n) = 1$.

Ainsi, $3n + 1$ est toujours premier avec n .

Étude avec $n + 1$

On calcule : $(3n + 1) - 3(n + 1) = -2$.

Tout diviseur commun à $3n + 1$ et $n + 1$ divise donc 2. Ainsi, $\text{PGCD}(3n + 1 ; n + 1) \in \{1, 2\}$.

☞ Si n est **pair**, alors $n + 1$ est impair et $3n + 1$ est impair. Leur PGCD est donc impair et divise 2, d'où $\text{PGCD}(3n + 1 ; n + 1) = 1$.

☞ Si n est **impair**, alors $n + 1$ est pair et $3n + 1$ est pair. Leur PGCD est donc égal à 2.

Conclusion : On a toujours $\text{PGCD}(3n + 1 ; n) = 1$.

Par conséquent :

☞ si n est pair, $3n + 1$ est premier avec $n(n + 1)$;

☞ si n est impair, le nombre 2 divise à la fois $3n + 1$ et $n(n + 1)$, donc la fraction est réductible.

Ainsi, $\frac{3n+1}{n(n+1)}$ est irréductible si et seulement si n est pair.

Exercice n°9 : Déterminer les entiers a et b tels que, pour tout entier n :

$$n^2 - 5 + (an + b)(n - 3) = 4$$

Que peut-on en déduire pour la fraction $\frac{n^2-5}{n-3}$?

Déterminons a et b .

Développons le membre de gauche :

$$\begin{aligned} n^2 - 5 + (an + b)(n - 3) &= n^2 - 5 + an^2 - 3an + bn - 3b \\ &= (1 + a)n^2 + (b - 3a)n - 5 - 3b. \end{aligned}$$

Cette expression doit être égale au polynôme constant 4 pour tout entier n . Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} 1 + a = 0, \\ b - 3a = 0, \\ -5 - 3b = 4. \end{cases}$$

La première équation donne : $a = -1$

La deuxième équation donne alors : $b = 3a = 3 \times (-1) = -3$

Vérifions la dernière équation : $-5 - 3b = -5 - 3 \times (-3) = -5 + 9 = 4$

Les trois équations sont donc vérifiées. Par conséquent, $a = -1$ et $b = -3$

On obtient ainsi l'identité : $n^2 - 5 + (-n - 3)(n - 3) = 4$

En effet,

$$\begin{aligned} n^2 - 5 + (-n - 3)(n - 3) &= n^2 - 5 - (n + 3)(n - 3) \\ &= n^2 - 5 - (n^2 - 9) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Considérons la fraction $\frac{n^2-5}{n-3}$

Elle est définie lorsque son dénominateur n'est pas nul, c'est-à-dire lorsque $n - 3 \neq 0$.

Ainsi, la fraction est définie pour $n \neq 3$

Soit désormais $n \neq 3$, et posons $d = \text{PGCD}(n^2 - 5 ; n - 3)$

Le nombre d divise $n^2 - 5$ et $n - 3$. Il divise donc toute combinaison linéaire à coefficients entiers de ces deux nombres.

Or l'identité obtenue précédemment peut s'écrire : $(n^2 - 5) + (-n - 3)(n - 3) = 4$.

Par conséquent, $d \mid 4$.

On peut même écrire $n^2 - 5 = (n - 3)(n + 3) + 4$,

d'où $\text{PGCD}(n^2 - 5 ; n - 3) = \text{PGCD}(4 ; n - 3)$

Il reste à étudier ce PGCD selon la parité de n .

Cas 1 : n est pair

Si n est pair, alors $n - 3$ est impair.

Comme $n - 3$ est impair, il n'est divisible ni par 2 ni par 4. On a donc : $\text{PGCD}(4 ; n - 3) = 1$.

Ainsi, $\text{PGCD}(n^2 - 5 ; n - 3) = 1$.

La fraction est donc irréductible.

Cas 2 : n est impair

Si n est impair, alors $n - 3$ est pair.

De plus, n^2 est impair, donc $n^2 - 5$ est pair. Le numérateur et le dénominateur sont ainsi tous les deux divisibles par 2.

Par conséquent, $\text{PGCD}(n^2 - 5 ; n - 3) \geq 2$, et la fraction est réductible, à condition qu'elle soit définie, donc que $n \neq 3$.

Exercice n°10 : Déterminer les entiers a et b tels que, pour tout entier n :

$$n^2 + 1 + (an + b)(n + 1) = 2$$

Que peut-on en déduire pour la fraction $\frac{n^2+1}{n+1}$?

Déterminons a et b . On développe :

$$\begin{aligned} n^2 + 1 + (an + b)(n + 1) &= n^2 + 1 + an^2 + an + bn + b \\ &= (1 + a)n^2 + (a + b)n + 1 + b \end{aligned}$$

Par identification avec le polynôme constant 2 :

$$\begin{cases} 1 + a = 0 \\ a + b = 0 \\ 1 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Le système est compatible : $a = -1, b = 1$.

Vérification : $n^2 + 1 + (-n + 1)(n + 1) = n^2 + 1 - n^2 + 1 = 2$.

Conséquence pour la fraction. Soit $d = \text{PGCD}(n^2 + 1 ; n + 1)$. Alors d divise $n^2 + 1$ et $n + 1$, donc d divise toute combinaison linéaire de ces deux entiers, en particulier :

$$1 \times (n^2 + 1) + (-n + 1)(n + 1) = 2$$

Donc d divise 2 : $d = 1$ ou $d = 2$.

Si n est pair : $n + 1$ est impair, donc d est impair et divise 2 : $d = 1$, la fraction est irréductible.

Si n est impair : $n + 1$ est pair et $n^2 + 1$ est pair, donc $d = 2$, la fraction est réductible.

Conclusion : $\frac{n^2+1}{n+1}$ est irréductible si et seulement si n est pair pour tout $n \neq -1$.

Exercice n°11 : Prouver que la fraction $\frac{n^3+2n}{3n^2+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n ... si c'est le cas. Sinon, préciser les valeurs de n pour lesquelles elle l'est.

Méthode : on cherche à obtenir une constante par combinaison linéaire à coefficients polynomiaux.

On effectue la division euclidienne de $3(n^3 + 2n)$ par $3n^2 + 1$:

$$3(n^3 + 2n) = 3n^3 + 6n = n(3n^2 + 1) + 5n$$

$$\text{Donc : } 3(n^3 + 2n) - n(3n^2 + 1) = 5n (*)$$

On élimine maintenant n à l'aide de $3n^2 + 1$. Multiplions (*) par n :

$$3n(n^3 + 2n) - n^2(3n^2 + 1) = 5n^2$$

Or $5n^2 = \frac{5}{3}(3n^2 + 1) - \frac{5}{3}$, ce qui n'est pas entier ; multiplions plutôt (*) par $3n$:

$$9n(n^3 + 2n) - 3n^2(3n^2 + 1) = 15n^2 = 5(3n^2 + 1) - 5$$

$$\text{D'où : } 9n(n^3 + 2n) - 3n^2(3n^2 + 1) - 5(3n^2 + 1) = -5$$

$$9n(n^3 + 2n) - (3n^2 + 5)(3n^2 + 1) = -5$$

Soit $d = \text{PGCD}(n^3 + 2n ; 3n^2 + 1)$. Alors d divise le membre de gauche, donc d divise 5 : $d = 1$ ou $d = 5$.

Étude du cas $d = 5$. Il faut que 5 divise $3n^2 + 1$, c'est-à-dire $3n^2 \equiv -1 \equiv 4 \pmod{5}$, soit $n^2 \equiv 3 \pmod{5}$ (car $3 \times 2 = 6 \equiv 1$, on multiplie par 2).

Or les carrés modulo 5 sont : $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 4, 4^2 = 1$. La valeur 3 n'est jamais atteinte.

Donc 5 ne divise jamais $3n^2 + 1$, et $d \neq 5$.

Conclusion : $d = 1$ pour tout entier naturel n : la fraction $\frac{n^3+2n}{3n^2+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

Exercice n°12 :

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , les entiers n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

On cherche une combinaison linéaire de n et $2n + 1$ égale à 1 :

$$(-2) \times n + 1 \times (2n + 1) = -2n + 2n + 1 = 1$$

Il existe donc $(u; v) = (-2; 1)$ tel que $nu + (2n + 1)v = 1$. D'après le théorème de Bézout, $\text{PGCD}(n; 2n + 1) = 1$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , les entiers n^2 et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

D'après la question 1, il existe u et v tels que $nu + (2n + 1)v = 1$. En élevant au carré :

$$(nu + (2n + 1)v)^2 = 1$$

$$n^2u^2 + 2nu(2n + 1)v + (2n + 1)^2v^2 = 1$$

$$n^2 \times u^2 + (2n + 1)(2nuv + (2n + 1)v^2) = 1$$

C'est une combinaison linéaire à coefficients entiers de n^2 et $(2n + 1)$ égale à 1. D'après le théorème de Bézout, $\text{PGCD}(n^2; 2n + 1) = 1$.

Vérification directe avec $u = -2, v = 1$: $4n^2 + (2n + 1)(-4n + 2n + 1) = 4n^2 + (2n + 1)(1 - 2n) = 4n^2 + 1 - 4n^2 = 1$.

3. En déduire que la fraction $\frac{n^2+n}{2n+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

On remarque que $n^2 + n = n(n + 1)$. Cherchons directement une combinaison linéaire de $n^2 + n$ et $2n + 1$: $4(n^2 + n) = 4n^2 + 4n = (2n + 1)^2 - 1$

D'où : $(2n + 1)(2n + 1) - 4(n^2 + n) = 1$

Il existe donc un couple d'entiers $(u; v) = (-4; 2n + 1)$ tel que : $(n^2 + n)u + (2n + 1)v = 1$

D'après le théorème de Bézout, $\text{PGCD}(n^2; +n 2n + 1) = 1$.

Conclusion : la fraction $\frac{n^2+n}{2n+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n .