



Exercice n°1 : À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer les PGCD des couples d'entiers suivants.

a) (156 ; 372)

b) (315 ; 231)

Exercice n°2 : À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer les PGCD des couples d'entiers suivants.

a) (595 ; 1 071)

b) (3 542 ; 8 470)

Exercice n°3 : À l'aide de l'algorithme d'Euclide, dire si les couples d'entiers suivants sont premiers entre eux.

a) (2 987 ; 4 181)

b) (7 429 ; 1 003)

Exercice n°4 :

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer $\text{PGCD}(a ; b)$ avec $a = 12\,376$ et $b = 8\,004$.

2. Que peut-on dire des nombres $\frac{a}{68}$ et $\frac{b}{68}$?

3. La fraction $\frac{8\,004}{12\,376}$ est-elle irréductible ? Si non, la rendre irréductible.

Exercice n°5 : Écrire un programme en langage naturel permettant de calculer le $\text{PGCD}(a ; b)$ avec l'algorithme d'Euclide, en affichant en plus le **nombre d'étapes** effectuées.

Tester ce programme avec $a = 2\,024$ et $b = 3\,795$, puis avec $a = 987\,654\,321$ et $b = 123\,456\,789$.

Exercice n°6 : Compléter le programme en Python ci-dessous pour que la fonction récursive euclide donne le $\text{PGCD}(a ; b)$.

```
def euclide(a,b):
```

```
    if b == 0:
```

```
        return ...
```

```
    return euclide(... , ...)
```

Tester ce programme avec $a = 2\,024$ et $b = 3\,795$, puis avec $a = 987\,654\,321$ et $b = 123\,456\,789$.

Écrire ensuite une version **itérative** pgcd(a,b) de cette fonction.

Exercice n°7 : Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que : $\text{PGCD}(a ; b) = 11$.

La dernière division de reste nul étant écrite, les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide sont : 2 ; 3 ; 1 ; 4.

Quelles sont les valeurs de a et b ?

Exercice n°8 : Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que : $\text{PGCD}(a ; b) = 6$.

La dernière division de reste nul étant écrite, les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide sont : 1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 3.

Quelles sont les valeurs de a et b ?



Correction

Exercice n°1 : À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer les PGCD des couples d'entiers suivants.

a) PGCD(156 ; 372)

On effectue les divisions euclidiennes successives (on commence par diviser le plus grand par le plus petit) :

$$372 = 156 \times 2 + 60$$

$$156 = 60 \times 2 + 36$$

$$60 = 36 \times 1 + 24$$

$$36 = 24 \times 1 + 12$$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non nul est 12.

$$\text{PGCD}(156 ; 372) = 12$$

Vérification : $156 = 12 \times 13$ et $372 = 12 \times 31$, avec 13 et 31 premiers entre eux.

b) PGCD(315 ; 231)

$$315 = 231 \times 1 + 84$$

$$231 = 84 \times 2 + 63$$

$$84 = 63 \times 1 + 21$$

$$63 = 21 \times 3 + 0$$

Le dernier reste non nul est 21.

$$\text{PGCD}(315 ; 231) = 21$$

Vérification : $315 = 21 \times 15$ et $231 = 21 \times 11$.

Exercice n°2 : À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer les PGCD des couples d'entiers suivants.

a) PGCD(595 ; 1 071)

$$1071 = 595 \times 1 + 476$$

$$595 = 476 \times 1 + 119$$

$$476 = 119 \times 4 + 0$$

Le dernier reste non nul est 119.

$$\text{PGCD}(595 ; 1071) = 119$$

b) PGCD(3 542 ; 8 470)

$$8470 = 3542 \times 2 + 1386$$

$$3542 = 1386 \times 2 + 770$$

$$1386 = 770 \times 1 + 616$$

$$770 = 616 \times 1 + 154$$

$$616 = 154 \times 4 + 0$$

Le dernier reste non nul est 154.

$$\text{PGCD}(3\,542 ; 8\,470) = 154$$

Exercice n°3 : À l'aide de l'algorithme d'Euclide, dire si les couples d'entiers suivants sont premiers entre eux.

Deux entiers sont premiers entre eux si et seulement si leur PGCD vaut 1.

a) (2 987 ; 4 181)

$$4181 = 2987 \times 1 + 1194$$

$$2987 = 1194 \times 2 + 599$$

$$1194 = 599 \times 1 + 595$$

$$599 = 595 \times 1 + 4$$

$$595 = 4 \times 148 + 3$$

$$4 = 3 \times 1 + 1$$

$$3 = 1 \times 3 + 0$$

Le dernier reste non nul est 1, donc $\text{PGCD}(2\,987; 4\,181) = 1$.

2 987 et 4 181 sont premiers entre eux.

b) (7 429 ; 1 003)

$$7429 = 1003 \times 7 + 408$$

$$1003 = 408 \times 2 + 187$$

$$408 = 187 \times 2 + 34$$

$$187 = 34 \times 5 + 17$$

$$34 = 17 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non nul est 17, donc $\text{PGCD}(7429; 1003) = 17 \neq 1$.

7 429 et 1 003 ne sont pas premiers entre eux ($\text{PGCD} = 17$).

En effet $7429 = 17 \times 19 \times 23$ et $1003 = 17 \times 59$.

Exercice n°4 :

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer $\text{PGCD}(a; b)$ avec $a = 12\,376$ et $b = 8\,004$.

Algorithme d'Euclide :

$$12376 = 8004 \times 1 + 4372$$

$$8004 = 4372 \times 1 + 3632$$

$$4372 = 3632 \times 1 + 740$$

$$3632 = 740 \times 4 + 672$$

$$740 = 672 \times 1 + 68$$

$$672 = 68 \times 9 + 60$$

$$68 = 60 \times 1 + 8$$

$$60 = 8 \times 7 + 4$$

$$8 = 4 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non nul est 4.

$$\text{PGCD}(12376; 8004) = 4$$

2. Que peut-on dire des nombres $\frac{a}{68}$ et $\frac{b}{68}$?

$$\frac{a}{68} = \frac{12376}{68} = 182 \text{ et } \frac{b}{68} = \frac{8004}{68} \approx 117,71$$

$8\,004 = 68 \times 117 + 48$: 68 ne divise pas 8 004.

Donc $\frac{a}{68}$ est un entier (182), mais $\frac{b}{68}$ n'est pas un entier. On ne peut donc pas parler de deux entiers premiers entre eux ici : 68 est un diviseur de a mais pas un diviseur commun à a et b (ce qui est cohérent avec $\text{PGCD} = 4$, car $68 \nmid 4$... plus précisément 68 ne divise pas le PGCD).

Conclusion : un diviseur commun de a et b doit nécessairement diviser $\text{PGCD}(a; b) = 4$. Comme $68 > 4$, 68 ne peut pas être un diviseur commun.

3. La fraction $\frac{8004}{12376}$ est-elle irréductible ? Si non, la rendre irréductible.

Puisque $\text{PGCD}(8\,004; 12\,376) = 4 \neq 1$, la fraction n'est pas irréductible.

$$\frac{8\,004}{12\,376} = \frac{8004 \div 4}{12376 \div 4} = \frac{2001}{3094}$$

Comme $\text{PGCD}(2\,001; 3\,094) = 1$ (on a divisé par le PGCD), la fraction $\frac{2001}{3094}$ est irréductible.

Exercice n°5 : Écrire un programme en langage naturel permettant de calculer le $\text{PGCD}(a; b)$ avec l'algorithme d'Euclide, en affichant en plus le **nombre d'étapes** effectuées.

Tester ce programme avec $a = 2\,024$ et $b = 3\,795$, puis avec $a = 987\,654\,321$ et $b = 123\,456\,789$.

Entrées : deux entiers naturels a et b non tous les deux nuls

Variables : r (reste), n (compteur d'étapes)

$n \leftarrow 0$

Tant que $b \neq 0$:

$r \leftarrow$ reste de la division euclidienne de a par b

$a \leftarrow b$

```

b ← r
n ← n + 1
Fin Tant que
Afficher "PGCD =", a
Afficher "Nombre d'étapes =", n

```

Test 1 : $a = 2024, b = 3795$

Étape	a	b	r
1	2024	3795	2024
2	3795	2024	1771
3	2024	1771	253
4	1771	253	0
—	253	0	—

(La première étape « inverse » simplement les nombres, car $2024 = 3795 \times 0 + 2024$.)

Résultat : PGCD = 253 en 4 étapes.

Vérification : $253 = 11 \times 23$; $2024 = 253 \times 8$ et $3795 = 253 \times 15$.

Test 2 : $a = 987\,654\,321, b = 123\,456\,789$

$$987\,654\,321 = 123\,456\,789 \times 8 + 9$$

$$123\,456\,789 = 9 \times 13\,717\,421 + 0$$

Résultat : PGCD = 9 en 2 étapes.

Exercice n°6 : Compléter le programme en Python ci-dessous pour que la fonction récursive euclide donne le PGCD(a ; b).

```

def euclide(a, b):
    if b == 0:
        return a
    return euclide(b, a % b)

```

```

def pgcd(a, b):
    while b != 0:
        a, b = b, a % b
    return a

```

Tests :

python

```
>>> euclide(2 024, 3 795)
```

```
253
```

```
>>> euclide(987 654 321, 123 456 789)
```

```
9
```

Exercice n°7 : Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que : PGCD(a ; b) = 11.

La dernière division de reste nul étant écrite, les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide sont : 2 ; 3 ; 1 ; 4.

Quelles sont les valeurs de a et b ?

On note $a > b$ et on écrit les 4 divisions euclidiennes. Les restes successifs sont r_1, r_2, r_3 puis 0, et le dernier reste non nul est le PGCD, soit 11.

$$\begin{cases} a = 2b + r_1 \\ b = 3r_1 + r_2 \\ r_1 = 1 \times r_2 + r_3 \\ r_2 = 4r_3 + 0 \end{cases}$$

Le dernier reste non nul est r_3 , donc $r_3 = 11$.

On remonte l'algorithme :

$$r_2 = 4 \times 11 = 44$$

$$r_1 = r_2 + r_3 = 44 + 11 = 55$$

$$b = 3r_1 + r_2 = 3 \times 55 + 44 = 165 + 44 = 209$$

$$a = 2b + r_1 = 2 \times 209 + 55 = 418 + 55 = 473$$

$$a = 473 \text{ et } b = 209$$

Vérification (algorithme d'Euclide direct) :

$$473 = 209 \times 2 + 55$$

$$209 = 55 \times 3 + 44$$

$$55 = 44 \times 1 + 11$$

$$44 = 11 \times 4 + 0$$

Le PGCD est bien 11. (Remarque : $473 = 11 \times 43$ et $209 = 11 \times 19$)

Exercice n°8 : Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que : $\text{PGCD}(a ; b) = 6$.

La dernière division de reste nul étant écrite, les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide sont : $1 ; 2 ; 2 ; 1 ; 3$.

Quelles sont les valeurs de a et b ?

Il y a 5 quotients, donc 5 divisions. Les restes sont r_1, r_2, r_3, r_4 puis 0, et $r_4 = \text{PGCD} = 6$.

$$\begin{cases} a = 1 \times b + r_1 \\ b = 2r_1 + r_2 \\ r_1 = 2r_2 + r_3 \\ r_2 = 1 \times r_3 + r_4 \\ r_3 = 3r_4 + 0 \end{cases}$$

Remontée des calculs, en partant de $r_4 = 6$:

$$r_3 = 3 \times 6 = 18$$

$$r_2 = r_3 + r_4 = 18 + 6 = 24$$

$$r_1 = 2r_2 + r_3 = 2 \times 24 + 18 = 48 + 18 = 66$$

$$b = 2r_1 + r_2 = 2 \times 66 + 24 = 132 + 24 = 156$$

$$a = b + r_1 = 156 + 66 = 222$$

$$a = 222 \text{ et } b = 156$$

Vérification :

$$222 = 156 \times 1 + 66$$

$$156 = 66 \times 2 + 24$$

$$66 = 24 \times 2 + 18$$

$$24 = 18 \times 1 + 6$$

$$18 = 6 \times 3 + 0$$

PGCD = 6. (En effet $222 = 6 \times 37$ et $156 = 6 \times 26$.)