



Exercice n°1 : Une urne contient 5 jetons numérotés 0 ; 2 ; 5 ; 15 et 30. Un joueur mise 8 € puis tire au hasard un jeton qui lui indique le montant (en euros) qu'il gagne.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain algébrique du joueur (mise comprise).
2. Quel gain moyen peut-il espérer s'il joue un grand nombre de fois à ce jeu ?
3. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice n°2 : On mise 5 € puis on lance quatre fois de suite une pièce équilibrée. On gagne 2 € par Pile obtenu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire N donnant le nombre de Pile obtenus.
2. En déduire la loi de probabilité du gain algébrique G (mise comprise).
3. Calculer $E(G)$. Ce jeu est-il équitable ?
4. Quelle mise rendrait le jeu équitable ?

Exercice n°3 : La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-3	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$

1. En utilisant la définition du cours, calculer l'espérance de X .
2. En utilisant les définitions du cours, calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X .
3. Retrouver la variance à l'aide de la formule de König-Huygens.

Exercice n°4 : Pour chacune des variables aléatoires suivantes dont on donne la loi de probabilité à l'aide d'un tableau, déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type (on arrondira si besoin les résultats à 0,01 près).

1.

x_i	-6	0	4	20
$P(X = x_i)$	0,40	0,25	0,25	0,10

2.

y_i	-12	-2	6	50
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	0,3	$\frac{1}{...}$

(on complètera la dernière probabilité)

3.

z_i	-8	-1	3	12
$P(Z = z_i)$	0,35	0,40	0,20	0,05

Exercice n°5 : On considère un jeu de hasard. La variable aléatoire X donnant le gain (mise comprise) a une loi de probabilité résumée dans le tableau ci-dessous.

x_i	-10	-4	0	100
$P(X = x_i)$	0,55	0,25	0,18	0,02

1. En utilisant la définition du cours, calculer $E(X)$.
2. Interpréter ce résultat.
3. Ce jeu est-il équitable ?
4. Calculer l'écart-type de X à 0,01 près et commenter.

Exercice n°6 : X est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs $-6 ; 2 ; 8$ et 20 . Son espérance est égale à 4 et sa variance est égale à 9 .

On considère les variables aléatoires Y, Z et T définies par :

$$Y = 5X, Z = X - 7, T = -2X + 3$$

1. Déterminer les valeurs que peuvent prendre Y, Z et T .
2. Déterminer $E(Y), E(Z)$ et $E(T)$.
3. Déterminer $V(Y), V(Z), V(T)$ ainsi que les écarts-types correspondants.

Exercice n°7 : Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant. Le joueur mise m euros, puis lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 :

- ☞ s'il obtient 6 , il remporte 15 € ;
- ☞ s'il obtient 4 ou 5 , il remporte 6 € ;
- ☞ sinon, il ne remporte rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (mise déduite).

1. On suppose dans cette question que $m = 5$. Établir la loi de probabilité de X .
2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à $0,01$ près).
4. Déterminer la valeur de la mise m pour que le jeu soit équitable.
5. Le forain souhaite gagner en moyenne $1,50$ € par partie. Quelle mise doit-il fixer ?



Correction

Exercice n°1 : Une urne contient 5 jetons numérotés 0 ; 2 ; 5 ; 15 et 30. Un joueur mise 8 € puis tire au hasard un jeton qui lui indique le montant (en euros) qu'il gagne.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain algébrique du joueur (mise comprise).

Le tirage se fait au hasard parmi 5 jetons : chaque jeton a la probabilité $\frac{1}{5}$ d'être tiré.

Le gain algébrique est : (montant du jeton) – (mise de 8 €).

Jeton tiré	0	2	5	15	30
Gain x_i	-8	-6	-3	7	22
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. Quel gain moyen peut-il espérer s'il joue un grand nombre de fois à ce jeu ?

Par définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum x_i p_i = \frac{1}{5}((-8) + (-6) + (-3) + 7 + 22)$$

$$E(X) = \frac{1}{5} \times 12 = 2,4$$

Interprétation : en jouant un très grand nombre de fois, le joueur peut espérer gagner en moyenne **2,40 € par partie** (loi des grands nombres).

3. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Comme $E(X) = 2,4 > 0$, le jeu est **favorable au joueur** (il n'est donc pas équitable). Pour rendre le jeu équitable, il faudrait fixer la mise à $\frac{0+2+5+15+30}{5} = \frac{52}{5} = 10,40\text{€}$.

Exercice n°2 : On mise 5 € puis on lance quatre fois de suite une pièce équilibrée. On gagne 2 € par Pile obtenu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire N donnant le nombre de Pile obtenus.

On lance 4 fois une pièce équilibrée : il y a $2^4 = 16$ issues équiprobables (suites de P et F).

Le nombre d'issues donnant exactement k pile est $\binom{4}{k}$:

$$\binom{4}{0} = 1, \binom{4}{1} = 4, \binom{4}{2} = 6, \binom{4}{3} = 4, \binom{4}{4} = 1$$

k	0	1	2	3	4
$P(N = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. En déduire la loi de probabilité du gain algébrique G (mise comprise).

Le gain algébrique est $G = 2N - 5$.

k	0	1	2	3	4
$g_i = 2k - 5$	-5	-3	-1	1	3
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

3. Calculer $E(G)$. Ce jeu est-il équitable ?

Calcul de l'espérance :

$$E(G) = \frac{1}{16} [(-5) \times 1 + (-3) \times 4 + (-1) \times 6 + 1 \times 4 + 3 \times 1]$$

$$E(G) = \frac{-5 - 12 - 6 + 4 + 3}{16} = \frac{-16}{16} = -1$$

Comme $E(G) = -1 \neq 0$, le jeu n'est pas équitable : il est défavorable au joueur, qui perd en moyenne 1 € par partie.

4. Quelle mise rendrait le jeu équitable ?

Si la mise vaut m , alors $G = 2N - m$ et $E(G) = 4 - m$. Le jeu est équitable si $E(G) = 0$, c'est-à-dire pour une mise de 4 €.

Exercice n°3 : La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-3	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$

1. En utilisant la définition du cours, calculer l'espérance de X .

Par définition, $E(X) = \sum_i x_i p_i$:

$$E(X) = (-3) \times \frac{2}{10} + 1 \times \frac{5}{10} + 5 \times \frac{3}{10} = \frac{-6 + 5 + 15}{10} = \frac{14}{10} = 1,4$$

2. En utilisant les définitions du cours, calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X .

Par définition, $V(X) = \sum_i p_i (x_i - E(X))^2$:

$$\Leftrightarrow (-3 - 1,4)^2 = (-4,4)^2 = 19,36$$

$$\Leftrightarrow (1 - 1,4)^2 = (-0,4)^2 = 0,16$$

$$\Leftrightarrow (5 - 1,4)^2 = 3,6^2 = 12,96$$

$$V(X) = 0,2 \times 19,36 + 0,5 \times 0,16 + 0,3 \times 12,96$$

$$V(X) = 3,872 + 0,08 + 3,888 = 7,84$$

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{7,84} = 2,8$.

3. Retrouver la variance à l'aide de la formule de König-Huygens.

Formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$$E(X^2) = 9 \times 0,2 + 1 \times 0,5 + 25 \times 0,3 = 1,8 + 0,5 + 7,5 = 9,8$$

$$V(X) = 9,8 - 1,4^2 = 9,8 - 1,96 = 7,84$$

On retrouve bien le même résultat.

Exercice n°4 : Pour chacune des variables aléatoires suivantes dont on donne la loi de probabilité à l'aide d'un tableau, déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type (on arrondira si besoin les résultats à 0,01 près).

1.

x_i	-6	0	4	20
$P(X = x_i)$	0,40	0,25	0,25	0,10

Espérance :

$$E(X) = -6 \times 0,4 + 0 \times 0,25 + 4 \times 0,25 + 20 \times 0,10 = -2,4 + 0 + 1 + 2 = 0,6$$

Variance (König-Huygens) :

$$E(X^2) = 36 \times 0,4 + 0 \times 0,25 + 16 \times 0,25 + 400 \times 0,10 = 14,4 + 0 + 4 + 40 = 58,4$$

$$V(X) = 58,4 - 0,6^2 = 58,4 - 0,36 = 58,04$$

Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{58,04} \approx 7,62$.

2.

y_i	-12	-2	6	50
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	0,3	$\frac{1}{\dots}$

(on complètera la dernière probabilité)

La somme des probabilités vaut 1, donc :

$$P(Y = 50) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 0,3\right)$$

Mettons au même dénominateur (60) : $\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$, $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$, $0,3 = \frac{18}{60}$.

$$P(Y = 50) = 1 - \frac{53}{60} = \frac{7}{60}$$

Espérance :

$$\begin{aligned} E(Y) &= -12 \times \frac{15}{60} + (-2) \times \frac{20}{60} + 6 \times \frac{18}{60} + 50 \times \frac{7}{60} \\ E(Y) &= \frac{-180 - 40 + 108 + 350}{60} = \frac{238}{60} = \frac{119}{30} \approx 3,97 \end{aligned}$$

Variance :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 144 \times \frac{15}{60} + 4 \times \frac{20}{60} + 36 \times \frac{18}{60} + 2500 \times \frac{7}{60} \\ E(Y^2) &= \frac{2160 + 80 + 648 + 17500}{60} = \frac{20388}{60} = 339,8 \\ V(Y) &= 339,8 - \left(\frac{119}{30}\right)^2 = 339,8 - \frac{14161}{900} \approx 339,8 - 15,7344 \approx 324,07 \end{aligned}$$

Écart-type : $\sigma(Y) = \sqrt{324,07} \approx 18,00$.

3.

z_i	-8	-1	3	12
$P(Z = z_i)$	0,35	0,40	0,20	0,05

Espérance :

$$E(Z) = -8 \times 0,35 + (-1) \times 0,40 + 3 \times 0,20 + 12 \times 0,05 = -2,8 - 0,4 + 0,6 + 0,6 = -2$$

Variance :

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= 64 \times 0,35 + 1 \times 0,40 + 9 \times 0,20 + 144 \times 0,05 = 22,4 + 0,4 + 1,8 + 7,2 = 31,8 \\ V(Z) &= 31,8 - (-2)^2 = 31,8 - 4 = 27,8 \end{aligned}$$

Écart-type : $\sigma(Z) = \sqrt{27,8} \approx 5,27$.

Exercice n°5 : On considère un jeu de hasard. La variable aléatoire X donnant le gain (mise comprise) a une loi de probabilité résumée dans le tableau ci-dessous.

x_i	-10	-4	0	100
$P(X = x_i)$	0,55	0,25	0,18	0,02

1. En utilisant la définition du cours, calculer $E(X)$.

$$\begin{aligned} E(X) &= (-10) \times 0,55 + (-4) \times 0,25 + 0 \times 0,18 + 100 \times 0,02 \\ E(X) &= -5,5 - 1 + 0 + 2 = -4,5 \end{aligned}$$

2. Interpréter ce résultat.

Si un joueur joue un très grand nombre de fois à ce jeu, il perdra en moyenne **4,50 € par partie**. Par exemple, sur 1 000 parties, sa perte totale avoisinera $1000 \times 4,5 = 4\,500\text{€}$.

3. Ce jeu est-il équitable ?

Un jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle. Ici $E(X) = -4,5 \neq 0$: **le jeu n'est pas équitable**, il est défavorable au joueur (donc favorable à l'organisateur).

4. Calculer l'écart-type de X à 0,01 près et commenter.

$$E(X^2) = 100 \times 0,55 + 16 \times 0,25 + 0 \times 0,18 + 10\,000 \times 0,02 = 55 + 4 + 0 + 200 = 259$$

$$V(X) = 259 - (-4,5)^2 = 259 - 20,25 = 238,75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{238,75} \approx 15,45$$

L'écart-type est très grand devant $|E(X)| = 4,5$. Les gains sont donc **très dispersés** autour de la moyenne : c'est typique d'un jeu où l'on perd de petites sommes très souvent et où l'on gagne un gros lot très rarement (ici 100 € avec une probabilité de 0,02).

Exercice n°6 : X est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs -6 ; 2 ; 8 et 20 . Son espérance est égale à 4 et sa variance est égale à 9 .

On considère les variables aléatoires Y , Z et T définies par :

$$Y = 5X, \quad Z = X - 7, \quad T = -2X + 3$$

1. Déterminer les valeurs que peuvent prendre Y , Z et T .

On applique la transformation à chacune des quatre valeurs de X .

$$\begin{aligned} \text{↵ } Y = 5X: & 5 \times (-6) = -30; 5 \times 2 = 10; 5 \times 8 = 40; 5 \times 20 = 100. \\ & \rightarrow Y \text{ prend les valeurs } -30 ; 10 ; 40 ; 100. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{↵ } Z = X - 7: & -6 - 7 = -13; 2 - 7 = -5; 8 - 7 = 1; 20 - 7 = 13. \\ & \rightarrow Z \text{ prend les valeurs } -13 ; -5 ; 1 ; 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{↵ } T = -2X + 3: & -2(-6) + 3 = 15; -2(2) + 3 = -1; -2(8) + 3 = -13; -2(20) + 3 = -37. \\ & \rightarrow T \text{ prend les valeurs } 15 ; -1 ; -13 ; -37. \end{aligned}$$

2. Déterminer $E(Y)$, $E(Z)$ et $E(T)$.

On utilise la **linéarité de l'espérance** : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

$$\text{↵ } E(Y) = 5E(X) = 5 \times 4 = 20$$

$$\text{↵ } E(Z) = E(X) - 7 = 4 - 7 = -3$$

$$\text{↵ } E(T) = -2E(X) + 3 = -8 + 3 = -5$$

3. Déterminer $V(Y)$, $V(Z)$, $V(T)$ ainsi que les écarts-types correspondants.

On utilise la propriété : $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et donc $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

Ici $V(X) = 9$ donc $\sigma(X) = 3$.

$$\text{↵ } V(Y) = 5^2 \times 9 = 225 \text{ et } \sigma(Y) = |5| \times 3 = 15$$

$$\text{↵ } V(Z) = 1^2 \times 9 = 9 \text{ et } \sigma(Z) = 3$$

$$\text{↵ } V(T) = (-2)^2 \times 9 = 36 \text{ et } \sigma(T) = |-2| \times 3 = 6$$

Exercice n°7 : Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant. Le joueur mise *meuros*, puis lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 :

$$\text{↵ s'il obtient 6, il remporte 15 € ;}$$

$$\text{↵ s'il obtient 4 ou 5, il remporte 6 € ;}$$

$$\text{↵ sinon, il ne remporte rien.}$$

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (mise déduite).

1. On suppose dans cette question que $m = 5$. Établir la loi de probabilité de X .

Le dé est équilibré : chaque face a une probabilité $\frac{1}{6}$.

$$\text{↵ « Obtenir 6 » : 1 issue, probabilité } \frac{1}{6} \rightarrow \text{gain } 15 - 5 = 10$$

$$\text{↵ « Obtenir 4 ou 5 » : 2 issues, probabilité } \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{gain } 6 - 5 = 1$$

$$\text{↵ « Obtenir 1, 2 ou 3 » : 3 issues, probabilité } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{gain } 0 - 5 = -5$$

x_i	-5	1	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

$$E(X) = -5 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{-15 + 2 + 10}{6} = \frac{-3}{6} = -0,5$$

Interprétation : sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne **0,50 € par partie**. Le jeu est défavorable au joueur.

3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi à 0,01 près).

$$E(X^2) = 25 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 100 \times \frac{1}{6} = \frac{75 + 2 + 100}{6} = \frac{177}{6} = 29,5$$

$$V(X) = 29,5 - (-0,5)^2 = 29,5 - 0,25 = 29,25$$

$$\sigma(X) = \sqrt{29,25} \approx 5,41$$

4. Déterminer la valeur de la mise m pour que le jeu soit équitable.

Notons R la variable aléatoire donnant le montant remporté (avant déduction de la mise) :

$$E(R) = 0 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{3} + 15 \times \frac{1}{6} = 2 + 2,5 = 4,5$$

Avec une mise m , on a $X = R - m$, donc $E(X) = 4,5 - m$.

Le jeu est équitable si $E(X) = 0$, soit $m = 4,50$ €.

5. Le forain souhaite gagner en moyenne 1,50 € par partie. Quelle mise doit-il fixer ?

Le forain gagne en moyenne $E(X) = m - 4,5$ par partie. On veut :

$$m - 4,5 = 1,5 \Leftrightarrow m = 6$$

Le forain doit fixer la mise à **6 €**.