



Exercice n°1 : Déterminer tous les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels qui vérifient les équations suivantes.

- a) $x^2 = y^2 + 45$
- b) $x^2 - 5xy = 21$

Exercice n°2 : Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :

- a) $n^2 - 4n = 45$
- b) $n^2 - 6n = 91$

Exercice n°3 : Déterminer les entiers relatifs n tels que $(n - 3)$ divise $(2n + 5)$.

Exercice n°4 : Soit n un entier relatif. Pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{4n-1}{n+2}$ est-elle un entier relatif ?

Exercice n°5 : Déterminer les couples d'entiers naturels $(x ; y)$ vérifiant :

$$x^2 - 5xy = 24$$

Exercice n°6 :

1. Montrer que si un entier naturel d divise $(5n + 3)$ et $(3n + 2)$, alors il divise 1.
2. En déduire que la fraction $\frac{5n+3}{3n+2}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

Exercice n°7 : Soit n un entier naturel. Démontrer que, quel que soit n , $2n^3 + 3n^2 + n$ est toujours divisible par 6.

Exercice n°8 : Soit n un naturel. Démontrer que, quel que soit n , $4n^2 + 4n + 3$ est impair, et en déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n + 2)$.



Correction

Exercice n°1 : Déterminer tous les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels qui vérifient les équations suivantes.

a) $x^2 = y^2 + 45$

Étape 1 : Isoler les inconnues et factoriser.

$$x^2 = y^2 + 45 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 45 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 45$$

Étape 2 : Déterminer les diviseurs positifs de 45.

$$D_{45} = \{1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45\}$$

Étape 3 : Comparer les facteurs.

Comme x et y sont des entiers naturels, $x + y \geq 0$. Le produit $(x - y)(x + y) = 45 > 0$ donc les deux facteurs sont strictement positifs, et de plus :

$$x + y \geq x - y$$

(car $y \geq 0$ donc $2y \geq 0$).

Les décompositions possibles de 45 en produit de deux entiers naturels avec le premier facteur inférieur ou égal au second sont :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 45 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 15 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Étape 4 : Résoudre chaque système.

En additionnant les deux lignes : $2x =$ somme, puis on en déduit y .

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 45 \end{cases} \Rightarrow 2x = 46 \Rightarrow x = 23 \text{ et } y = 45 - 23 = 22$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 15 \end{cases} \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9 \text{ et } y = 15 - 9 = 6$$

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7 \text{ et } y = 9 - 7 = 2$$

Conclusion : les couples solutions sont $(23; 22)$, $(9; 6)$ et $(7; 2)$.

b) $x^2 - 5xy = 21$

Étape 1 : Factoriser par x .

$$x^2 - 5xy = 21 \Leftrightarrow x(x - 5y) = 21$$

Étape 2 : Déterminer les diviseurs positifs de 21.

$$D_{21} = \{1 ; 3 ; 7 ; 21\}$$

Étape 3 : Comparer les facteurs.

x est un entier naturel et le produit vaut $21 > 0$, donc $x > 0$ et $x - 5y > 0$.

Comme $y \geq 0$, on a $5y \geq 0$ donc :

$$x \geq x - 5y$$

Les décompositions possibles sont donc :

$$\begin{cases} x = 21 \\ x - 5y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 7 \\ x - 5y = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ x - 5y = 7 \end{cases} \text{ (impossible : } 7 > 3)$$

On garde aussi le cas $x = 1$, $x - 5y = 21$: impossible car $21 > 1$.

Étape 4 : Résoudre.

$$x = 21 \text{ et } 21 - 5y = 1 \Leftrightarrow 5y = 20 \Leftrightarrow y = 4 : \text{convient (entier naturel).}$$

$$x = 7 \text{ et } 7 - 5y = 3 \Leftrightarrow 5y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{5} : \text{n'est pas un entier, à rejeter.}$$

Conclusion : l'unique couple solution est $(21 ; 4)$.

Exercice n°2 : Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :

a) $n^2 - 4n = 45$

Étape 1 : Factoriser en faisant apparaître un produit.

On complète le carré pour obtenir une différence de deux carrés :

$$n^2 - 4n = 45 \Leftrightarrow n^2 - 4n + 4 = 49 \Leftrightarrow (n - 2)^2 = 49$$

Étape 2 : Utiliser la différence de carrés.

$$(n-2)^2 - 7^2 = 0 \Leftrightarrow (n-2-7)(n-2+7) = 0 \Leftrightarrow (n-9)(n+5) = 0$$

Étape 3 : Conclure (produit de facteurs nul).

$$n-9 = 0 \text{ ou } n+5 = 0$$

$$n = 9 \text{ ou } n = -5$$

Ces deux valeurs sont bien des entiers relatifs.

Conclusion : $S = \{-5; 9\}$.

b) $n^2 - 6n = 91$

Étape 1 : Faire apparaître une différence de deux carrés.

On complète le carré : $n^2 - 6n = (n-3)^2 - 9$, donc

$$n^2 - 6n = 91 \Leftrightarrow (n-3)^2 - 9 = 91 \Leftrightarrow (n-3)^2 = 100$$

Étape 2 : Factoriser.

$$(n-3)^2 - 10^2 = 0 \Leftrightarrow ((n-3)-10)((n-3)+10) = 0 \Leftrightarrow (n-13)(n+7) = 0$$

Étape 3 : Conclure avec la règle du produit nul.

$$n-13 = 0 \text{ ou } n+7 = 0$$

$$n = 13 \text{ ou } n = -7$$

Ces deux valeurs appartiennent bien à $\mathbb{Z}$.

Conclusion : $S = \{-7; 13\}$.

Exercice n°3 : Déterminer les entiers relatifs n tels que $(n-3)$ divise $(2n+5)$.

On cherche à faire apparaître $(n-3)$ dans l'expression $(2n+5)$.

$$2n+5 = 2(n-3) + 6 + 5 = 2(n-3) + 11$$

Donc $(n-3)$ divise $(2n+5)$ si et seulement si $(n-3)$ divise $2(n-3) + 11$.

Comme $(n-3)$ divise $2(n-3)$, cela équivaut à : $(n-3)$ divise 11.

Recherche des diviseurs de 11 (nombre premier) :

Diviseurs de 11: $-11; -1; 1; 11$

On résout donc :

$$n-3 = -11 \Rightarrow n = -8$$

$$n-3 = -1 \Rightarrow n = 2$$

$$n-3 = 1 \Rightarrow n = 4$$

$$n-3 = 11 \Rightarrow n = 14$$

Conclusion : $n \in \{-8; 2; 4; 14\}$

Exercice n°4 : Soit n un entier relatif. Pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{4n-1}{n+2}$ est-elle un entier relatif ?

On effectue une division pour isoler le reste : $4n-1 = 4(n+2) - 8 - 1 = 4(n+2) - 9$

$$\text{Donc : } \frac{4n-1}{n+2} = 4 - \frac{9}{n+2}$$

Cette expression est un entier relatif si et seulement si $(n+2)$ divise 9.

Diviseurs de 9 : $D = \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$

On résout $n+2 = d$ pour chaque diviseur d :

$n+2$	-9	-3	-1	1	3	9
n	-11	-5	-3	-1	1	7

Conclusion : $n \in \{-11; -5; -3; -1; 1; 7\}$

Exercice n°5 : Déterminer les couples d'entiers naturels $(x; y)$ vérifiant :

$$x^2 - 5xy = 24$$

On factorise par x : $x(x-5y) = 24$

Déterminons les diviseurs positifs de 24 : $D_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

Comme x et y sont des entiers naturels, si $y \geq 1$ alors $x-5y < x$, et x doit être un diviseur de 24 tel que $x-5y$ soit aussi un facteur (positif ou négatif) de la décomposition.

On étudie les décompositions $x \times (x-5y) = 24$ avec $x > 0$:

$$x = 24, x - 5y = 1 \Rightarrow 5y = 23: \text{ pas de solution entière}$$

$$x = 12, x - 5y = 2 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 8, x - 5y = 3 \Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 6, x - 5y = 4 \Rightarrow 5y = 2: \text{ pas de solution entière}$$

$$x = 4, x - 5y = 6 \Rightarrow 5y = -2: \text{ impossible } (y \geq 0)$$

$$x = 3, x - 5y = 8 \Rightarrow 5y = -5: \text{ impossible}$$

$$x = 2, x - 5y = 12: \text{ impossible}$$

$$x = 1, x - 5y = 24: \text{ impossible}$$

Conclusion : Les couples solutions sont (12 ; 2) et (8 ; 1).

Exercice n°6 :

1. Montrer que si un entier naturel d divise $(5n + 3)$ et $(3n + 2)$, alors il divise 1.

Si d divise $(5n + 3)$ et $(3n + 2)$, alors d divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres.

$$\text{On calcule : } 3(5n + 3) - 5(3n + 2) = 15n + 9 - 15n - 10 = -1$$

Donc d divise $3(5n + 3) - 5(3n + 2) = -1$, c'est-à-dire d divise 1.

2. En déduire que la fraction $\frac{5n+3}{3n+2}$ est irréductible pour tout entier naturel n .

D'après la question 1, le seul diviseur commun positif de $(5n + 3)$ et $(3n + 2)$ est 1.

Le PGCD de $(5n + 3)$ et $(3n + 2)$ vaut donc 1 : ces deux nombres sont premiers entre eux.

Conclusion : La fraction $\frac{5n+3}{3n+2}$ est donc irréductible pour tout entier naturel n .

Exercice n°7 : Soit n un entier naturel. Démontrer que, quel que soit n , $2n^3 + 3n^2 + n$ est toujours divisible par 6.

$$\text{On factorise l'expression : } 2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) = n(n + 1)(2n + 1)$$

Divisibilité par 2 : Parmi n et $n + 1$, l'un des deux est pair (deux entiers consécutifs). Donc $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 2.

Divisibilité par 3 : On raisonne selon le reste de n modulo 3 :

Si $n \equiv 0 \pmod{3}$: n est divisible par 3.

Si $n \equiv 1 \pmod{3}$: alors $2n + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, donc $2n + 1$ est divisible par 3.

Si $n \equiv 2 \pmod{3}$: alors $n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, donc $n + 1$ est divisible par 3.

Dans tous les cas, un des trois facteurs est divisible par 3.

Conclusion : Le produit $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 2 et par 3, donc par 6 (car 2 et 3 sont premiers entre eux). Ainsi $2n^3 + 3n^2 + n$ est toujours divisible par 6.

Exercice n°8 : Soit n un naturel. Démontrer que, quel que soit n , $4n^2 + 4n + 3$ est impair, et en déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n + 2)$.

Étape 1 : Montrer que $4n^2 + 4n + 3$ est impair.

$$\text{On peut écrire : } 4n^2 + 4n + 3 = 2(2n^2 + 2n + 1) + 1$$

Comme $2n^2 + 2n + 1$ est un entier, $4n^2 + 4n + 3$ s'écrit sous la forme $2k + 1$ avec $k = 2n^2 + 2n + 1 \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $4n^2 + 4n + 3$ est donc impair, pour tout n naturel.

Étape 2 : En déduire la non-divisibilité par $n(n + 2)$

$$4n^2 + 4n + 3 = 4(n^2 + 2n) - 4n + 3 = 4 \times n(n + 2) - 4n + 3$$

Donc si $n(n + 2)$ divise $4n^2 + 4n + 3$, alors $n(n + 2)$ divise $-4n + 3$ (ou $4n - 3$).

Pour tout $n \geq 1$, on a $4n - 3 \geq 1 > 0$, donc $|4n - 3| = 4n - 3$.

$$\text{Par ailleurs, } n(n + 2) - (4n - 3) = n^2 + 2n - 4n + 3$$

$$= n^2 - 2n + 3$$

$$= (n - 1)^2 + 2 > 0$$

On en déduit que : $0 < 4n - 3 < n(n + 2)$.

$$\text{Or, } 4n^2 + 4n + 3 = 4n(n + 2) - (4n - 3).$$

Supposons que $n(n + 2)$ divise $4n^2 + 4n + 3$. Comme $n(n + 2)$ divise également $4n(n + 2)$, il diviserait leur différence : $4n(n + 2) - (4n^2 + 4n + 3) = 4n - 3$.
Cela est impossible, car un entier naturel non nul strictement inférieur à $n(n + 2)$ ne peut pas être divisible par $n(n + 2)$.
Ainsi, $n(n + 2) \nmid 4n^2 + 4n + 3$ pour tout $n \geq 1$