



Exercice n°1 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes possibles de 2^n dans la division par 7.
2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles $2^n + 3$ est divisible par 7.
3. En déduire le reste de la division euclidienne de 65^{2024} par 7.

Exercice n°2 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes possibles de 3^n dans la division par 13.
2. En déduire les entiers n tels que $3^n - 1$ est divisible par 13.
3. En déduire que $2019^{2023} \equiv 4 \pmod{13}$.

Exercice n°3 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes possibles de 4^n dans la division par 9.
2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles $4^n + 5$ est divisible par 9.
3. En déduire que $130^{2025} \equiv 1 \pmod{9}$.

Exercice n°4 : Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $5 \times 3^n + 2$ est-il divisible par 11 ?

Exercice n°5 :

1. Déterminer les restes de la division euclidienne de 8^n par 13 suivant les valeurs de l'entier naturel n .
2. En déduire le reste de la division par 13 de 2022^{2026} .

Exercice n°6 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes possibles de 9^n dans la division par 10.
2. En déduire les entiers n tels que $9^n + 1$ est divisible par 10.
3. En déduire le chiffre des unités de 9^{97} puis celui de 2019^{2024} .

Exercice n°7 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n , le reste dans la division euclidienne par 11 de 10^n .
2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles $10^n - 1$ est divisible par 11.
3. Démontrer alors que $2032^{2026} \equiv 3 \pmod{11}$.



Correction

Exercice n°1 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes possibles de 2^n dans la division par 7.

On établit la série des restes possibles de 2^n par 7.

$$2^0 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$2^1 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod{7}$$

On retrouve le reste 1, déjà obtenu pour $n = 0$: la série des restes est 1,2,4, soit une période de 3.

On divise n par 3 : $n = 3q + r$ avec $0 \leq r < 3$. On a alors :

$$2^n = 2^{3q+r} = (2^3)^q \times 2^r \equiv 1^q \times 2^r \equiv 2^r \pmod{7}$$

Résumons ce résultat dans un tableau :

$n \equiv \dots \pmod{3}$	0	1	2
$2^n \equiv \dots \pmod{7}$	1	2	4

2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles $2^n + 3$ est divisible par 7.

$(2^n + 3)$ est divisible par 7 si, et seulement si :

$$2^n + 3 \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow 2^n \equiv -3 \equiv 4 \pmod{7}$$

D'après le tableau : $2^n \equiv 4 \pmod{7} \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{3}$.

Conclusion : $2^n + 3$ est divisible par 7 si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de n par 3 est égal à 2.

3. En déduire le reste de la division euclidienne de 65^{2024} par 7.

On a $65 = 7 \times 9 + 2$ donc $65 \equiv 2 \pmod{7}$.

De plus, $2024 = 3 \times 674 + 2$ donc $2024 \equiv 2 \pmod{3}$.

D'après les règles de compatibilité et le tableau : $65^{2024} \equiv 2^{2024} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{7}$

Le reste de la division euclidienne de 65^{2024} par 7 est 4.

Exercice n°2 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes possibles de 3^n dans la division par 13.

On établit la série des restes possibles de 3^n par 13.

$$3^0 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$3^1 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{13}$$

$$3^3 \equiv 27 \equiv 1 \pmod{13}$$

On retrouve le reste 1 : la série des restes est 1,3,9, soit une période de 3.

On divise n par 3 : $n = 3q + r$ avec $0 \leq r < 3$:

$$3^n = (3^3)^q \times 3^r \equiv 1^q \times 3^r \equiv 3^r \pmod{13}$$

$n \equiv \dots \pmod{3}$	0	1	2
$3^n \equiv \dots \pmod{13}$	1	3	9

2. En déduire les entiers n tels que $3^n - 1$ est divisible par 13.

$(3^n - 1)$ est divisible par 13 si, et seulement si :

$$3^n - 1 \equiv 0 \pmod{13} \Leftrightarrow 3^n \equiv 1 \pmod{13}$$

D'après le tableau : $3^n \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3}$.

Conclusion : $3^n - 1$ est divisible par 13 si, et seulement si, n est un multiple de 3.

3. En déduire que $2019^{2023} \equiv 4 \pmod{13}$.

$2019 = 13 \times 155 + 4 \Rightarrow 2019 \equiv 4 \pmod{13}$.

On a $4^2 \equiv 16 \equiv 3 \pmod{13}$, donc $4^3 \equiv 3 \times 4 = 12 \equiv -1 \pmod{13}$.

Par conséquent, $4^6 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{13}$.

Or $2023 = 6 \times 337 + 1$, donc : $2019^{2023} \equiv 4^{2023} = (4^6)^{337} \times 4^1 \equiv 1 \times 4 \equiv 4 \pmod{13}$.

Exercice n°3 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes possibles de 4^n dans la division par 9.

On établit la série des restes possibles de 4^n par 9.

$$4^0 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$4^1 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$4^2 \equiv 16 \equiv 7 \pmod{9}$$

$$4^3 \equiv 4 \times 7 \equiv 28 \equiv 1 \pmod{9}$$

On retrouve le reste 1 : la série des restes est 1,4,7, soit une période de 3.

On divise n par 3 : $n = 3q + r$ avec $0 \leq r < 3$:

$$4^n = (4^3)^q \times 4^r \equiv 1^q \times 4^r \equiv 4^r \pmod{9}$$

$n \equiv \dots \pmod{3}$	0	1	2
$4^n \equiv \dots \pmod{9}$	1	4	7

2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles $4^n + 5$ est divisible par 9.

$(4^n + 5)$ est divisible par 9 si, et seulement si : $4^n + 5 \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow 4^n \equiv -5 \equiv 4 \pmod{9}$

D'après le tableau : $4^n \equiv 4 \pmod{9} \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{3}$.

Conclusion : $4^n + 5$ est divisible par 9 si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de n par 3 est égal à 1.

3. En déduire que $130^{2025} \equiv 1 \pmod{9}$.

On a $130 = 9 \times 14 + 4$, donc $130 \equiv 4 \pmod{9}$.

Par ailleurs, $2025 = 3 \times 675$, donc $2025 \equiv 0 \pmod{3}$.

D'après le tableau de la question 1, lorsque l'exposant est congru à 0 modulo 3, la puissance est congrue à 1 modulo 9. Ainsi : $130^{2025} \equiv 4^{2025} \equiv 1 \pmod{9}$.

Exercice n°4 : Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $5 \times 3^n + 2$ est-il divisible par 11 ?

On établit d'abord la série des restes de 3^n modulo 11.

$$3^0 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$3^1 \equiv 3 \pmod{11}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{11}$$

$$3^3 \equiv 27 \equiv 5 \pmod{11}$$

$$3^4 \equiv 3 \times 5 \equiv 15 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$3^5 \equiv 3 \times 4 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}$$

La série des restes est 1,3,9,5,4, de période 5.

En écrivant $n = 5q + r$ avec $0 \leq r < 5$: $3^n = (3^5)^q \times 3^r \equiv 3^r \pmod{11}$

$n \equiv \dots \pmod{5}$	0	1	2	3	4
$3^n \equiv \dots \pmod{11}$	1	3	9	5	4
$5 \times 3^n + 2 \equiv \dots \pmod{11}$	7	6	3	5	0

Détail des calculs de la dernière ligne :

$$r = 0 : 5 \times 1 + 2 = 7$$

$$r = 1 : 5 \times 3 + 2 = 17 \equiv 6 \pmod{11}$$

$$r = 2 : 5 \times 9 + 2 = 47 \equiv 3 \pmod{11} \text{ (car } 47 = 44 + 3)$$

$$r = 3 : 5 \times 5 + 2 = 27 \equiv 5 \pmod{11}$$

$$r = 4 : 5 \times 4 + 2 = 22 \equiv 0 \pmod{11}$$

Conclusion : $5 \times 3^n + 2$ est divisible par 11 si, et seulement si, $n \equiv 4 \pmod{5}$, c'est-à-dire si le reste de la division euclidienne de n par 5 est égal à 4 (soit $n \in \{4, 9, 14, 19, \dots\}$).

Exercice n°5 :

1. Déterminer les restes de la division euclidienne de 8^n par 13 suivant les valeurs de l'entier naturel n .

On établit la série des restes possibles de 8^n par 13.

$$8^0 \equiv 1 \pmod{13}$$

$$8^1 \equiv 8 \pmod{13}$$

$$8^2 \equiv 64 \equiv 12 \pmod{13} \text{ (car } 64 = 52 + 12)$$

$$8^3 \equiv 8 \times 12 \equiv 96 \equiv 5 \pmod{13} \text{ (car } 96 = 91 + 5)$$

$$8^4 \equiv 8 \times 5 \equiv 40 \equiv 1 \pmod{13} \text{ (car } 40 = 39 + 1)$$

On retrouve le reste 1 : la série des restes est 1, 8, 12, 5, de période 4.

On divise n par 4 : $n = 4q + r$ avec $0 \leq r < 4$: $8^n = (8^4)^q \times 8^r \equiv 1^q \times 8^r \equiv 8^r \pmod{13}$

$n \equiv \dots \pmod{4}$	0	1	2	3
$8^n \equiv \dots \pmod{13}$	1	8	12	5

2. En déduire le reste de la division par 13 de 2022^{2026} .

$$2022 = 13 \times 155 + 7 \Rightarrow 2022 \equiv 7 \pmod{13}.$$

D'après le petit théorème de Fermat (13 premier, $7 \not\equiv 0$), $7^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

Comme $2026 = 12 \times 168 + 10$, on a : $2022^{2026} \equiv 7^{2026} \equiv 7^{10} \pmod{13}$.

Calcul de 7^{10} : $7^2 \equiv 10$, $7^4 \equiv 100 \equiv 9$, $7^8 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$.

Donc : $7^{10} = 7^8 \times 7^2 \equiv 3 \times 10 = 30 \equiv 4 \pmod{13}$.

Le reste de la division euclidienne de 2022^{2026} par 13 est donc 4.

Exercice n°6 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes possibles de 9^n dans la division par 10.

On établit la série des restes possibles de 9^n par 10.

$$9^0 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$9^1 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$9^2 \equiv 81 \equiv 1 \pmod{10}$$

On retrouve le reste 1 : la série des restes est 1, 9, de période 2.

On divise n par 2 : $n = 2q + r$ avec $0 \leq r < 2$: $9^n = (9^2)^q \times 9^r \equiv 1^q \times 9^r \equiv 9^r \pmod{10}$

$n \equiv \dots \pmod{2}$	0	1
$9^n \equiv \dots \pmod{10}$	1	9

2. En déduire les entiers n tels que $9^n + 1$ est divisible par 10.

$(9^n + 1)$ est divisible par 10 si, et seulement si : $9^n + 1 \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow 9^n \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$

D'après le tableau : $9^n \equiv 9 \pmod{10} \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{2}$.

Conclusion : $9^n + 1$ est divisible par 10 si, et seulement si, n est impair.

3. En déduire le chiffre des unités de 9^{97} puis celui de 2019^{2024} .

Le chiffre des unités d'un entier naturel est son reste dans la division euclidienne par 10.

97 est impair, donc $97 \equiv 1 \pmod{2}$ et $9^{97} \equiv 9 \pmod{10}$: le chiffre des unités de 9^{97} est 9.

$2\,019 \equiv 9 \pmod{10}$ et $2\,024 \equiv 0 \pmod{2}$, donc : $2\,019^{2\,024} \equiv 9^{2\,024} \equiv 9^0 \equiv 1 \pmod{10}$

Le chiffre des unités de $2\,019^{2\,024}$ est 1.

Exercice n°7 :

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n , le reste dans la division euclidienne par 11 de 10^n .

On établit la série des restes possibles de 10^n par 11.

$$10^0 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$10^1 \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11}$$

$$10^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{11}$$

On retrouve le reste 1 : la série des restes est 1, 10, de période 2.

Plus généralement, comme $10 \equiv -1 \pmod{11}$, on a $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$.

On divise n par 2 : $n = 2q + r$ avec $0 \leq r < 2$: $10^n = (10^2)^q \times 10^r \equiv 10^r \pmod{11}$

$n \equiv \dots \pmod{2}$	0	1
$10^n \equiv \dots \pmod{11}$	1	10

Conclusion : si n est pair, le reste est 1 ; si n est impair, le reste est 10.

2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles $10^n - 1$ est divisible par 11.

$(10^n - 1)$ est divisible par 11 si, et seulement si : $10^n \equiv 1 \pmod{11}$

D'après le tableau : $10^n \equiv 1 \pmod{11} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{2}$.

Conclusion : $10^n - 1$ est divisible par 11 si, et seulement si, n est pair.

3. Démontrer alors que $2\,032^{2\,026} \equiv 3 \pmod{11}$.

On a : $2\,032 \equiv 8 \pmod{11}$

Ainsi $2\,032^{2\,026} \equiv 8^{2\,026} \pmod{11}$

D'après le petit théorème de Fermat, $8^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Or, $2\,026 = 10 \times 202 + 6$

Donc, $8^{2\,026} \equiv 8^6 \pmod{11}$

Calculons : $8^2 \equiv 64 \equiv 9 \pmod{11}$,

$8^4 \equiv 9^2 \equiv 81 \equiv 4 \pmod{11}$.

Puis : $8^6 \equiv 8^4 \times 8^2 \equiv 4 \times 9 \equiv 36 \equiv 3 \pmod{11}$.

Finalement, $2\,032^{2\,026} \equiv 3 \pmod{11}$