



Exercice n°1 : Montrer que 541 est un nombre premier.

On expliquera clairement la méthode utilisée.

Exercice n°2 : Déterminer si les entiers suivants sont premiers ou non.

a) 143

b) 211

c) 391

d) 461

e) 589

f) 683

Exercice n°3 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = 3n^2 - n - 10$.

1. Factoriser N par $(n - 2)$.

2. Pour quelle(s) valeur(s) de n le nombre N est-il premier ?

Exercice n°4 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = n^2 + 5n + 6$.

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

« Il existe une valeur de n pour laquelle N est un nombre premier. »

Exercice n°5 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = 2n^2 - 5n - 3$.

1. Factoriser N par $(n - 3)$.

2. Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles N est un nombre premier.

Exercice n°6 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = n^2 - 6n + 8$.

1. Factoriser N .

2. Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles N est un nombre premier.

3. La proposition « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N = n^2 - 6n + 11$ est un nombre premier » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.



Correction

Exercice n°1 : Montrer que 541 est un nombre premier.

On expliquera clairement la méthode utilisée.

Étape 1 : encadrement de la racine carrée.

On cherche un encadrement de $\sqrt{541}$ par deux entiers consécutifs : $23^2 = 529$ et $24^2 = 576$

Comme $529 < 541 < 576$, on a $23 < \sqrt{541} < 24$.

Étape 2 : liste des diviseurs premiers à tester.

D'après le critère d'arrêt, il suffit de tester les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{541}$, c'est-à-dire les nombres premiers inférieurs ou égaux à 23 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Étape 3 : tests de divisibilité.

Par 2 : 541 est impair (son chiffre des unités est 1), donc 541 n'est pas divisible par 2.

Par 3 : $5 + 4 + 1 = 10$ qui n'est pas divisible par 3, donc 541 n'est pas divisible par 3.

Par 5 : le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5, donc 541 n'est pas divisible par 5.

Par 11 : somme alternée $1 - 4 + 5 = 2$, non divisible par 11, donc 541 n'est pas divisible par 11.

On effectue ensuite les divisions euclidiennes :

$541 = 7 \times 77 + 2$, $541 = 13 \times 41 + 8$, $541 = 17 \times 31 + 14$

$541 = 19 \times 28 + 9$, $541 = 23 \times 23 + 12$

Aucun reste n'est nul.

Étape 4 : conclusion.

541 ne possède aucun diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{541}$. D'après la contraposée du critère d'arrêt : 541 est un nombre premier.

Exercice n°2 : Déterminer si les entiers suivants sont premiers ou non.

a) 143

$11^2 = 121 < 143 < 144 = 12^2$, donc $11 < \sqrt{143} < 12$.

Premiers à tester : 2, 3, 5, 7, 11.

Pas divisible par 2 (impair), ni par 5 (unité 3).

$1 + 4 + 3 = 8$: pas divisible par 3.

$143 = 7 \times 20 + 3$: pas divisible par 7.

Critère de 11 : $3 - 4 + 1 = 0$, donc 143 est divisible par 11 : $143 = 11 \times 13$.

143 n'est pas premier.

b) 211

$14^2 = 196 < 211 < 225 = 15^2$, donc $14 < \sqrt{211} < 15$.

Premiers à tester : 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Impair : pas divisible par 2 ; unité 1 : pas divisible par 5.

$2 + 1 + 1 = 4$: pas divisible par 3.

$211 = 7 \times 30 + 1$

Critère de 11 : $1 - 1 + 2 = 2 \neq 0$: pas divisible par 11.

$211 = 13 \times 16 + 3$

Aucun diviseur premier $\leq \sqrt{211}$:

211 est premier.

c) 391

$$19^2 = 361 < 391 < 400 = 20^2, \text{ donc } 19 < \sqrt{391} < 20.$$

Premiers à tester : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Impair, unité 1 : pas divisible par 2 ni 5.

$$3 + 9 + 1 = 13 : \text{ pas divisible par 3.}$$

$$391 = 7 \times 55 + 6$$

$$1 - 9 + 3 = -5 : \text{ pas divisible par 11.}$$

$$391 = 13 \times 30 + 1$$

$$391 = 17 \times 23 : \text{ divisible par 17 !}$$

391 n'est pas premier.

d) 461

$$21^2 = 441 < 461 < 484 = 22^2, \text{ donc } 21 < \sqrt{461} < 22.$$

Premiers à tester : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Impair, unité 1 : pas divisible par 2 ni 5.

$$4 + 6 + 1 = 11 : \text{ pas divisible par 3.}$$

$$461 = 7 \times 65 + 6$$

$$1 - 6 + 4 = -1 : \text{ pas divisible par 11.}$$

$$461 = 13 \times 35 + 6$$

$$461 = 17 \times 27 + 2$$

$$461 = 19 \times 24 + 5$$

461 est premier.

e) 589

$$24^2 = 576 < 589 < 625 = 25^2, \text{ donc } 24 < \sqrt{589} < 25.$$

Premiers à tester : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Impair, unité 9 : pas divisible par 2 ni 5.

$$5 + 8 + 9 = 22 : \text{ pas divisible par 3.}$$

$$589 = 7 \times 84 + 1$$

$$9 - 8 + 5 = 6 : \text{ pas divisible par 11.}$$

$$589 = 13 \times 45 + 4$$

$$589 = 17 \times 34 + 11$$

$$589 = 19 \times 31 : \text{ divisible par 19 !}$$

589 n'est pas premier.

f) 683

$$26^2 = 676 < 683 < 729 = 27^2, \text{ donc } 26 < \sqrt{683} < 27.$$

Premiers à tester : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Impair, unité 3 : pas divisible par 2 ni 5.

$$6 + 8 + 3 = 17 : \text{ pas divisible par 3.}$$

$$683 = 7 \times 97 + 4$$

$$3 - 8 + 6 = 1 : \text{ pas divisible par 11.}$$

$$683 = 13 \times 52 + 7$$

$$683 = 17 \times 40 + 3$$

$$683 = 19 \times 35 + 18$$

$$683 = 23 \times 29 + 16$$

683 est premier.

Exercice n°3 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = 3n^2 - n - 10$.

1. Factoriser N par $(n - 2)$.

$$\text{On remarque que pour } n = 2 : N = 3 \times 4 - 2 - 10 = 12 - 12 = 0.$$

Donc 2 est une racine du trinôme et N est factorisable par $(n - 2)$.

On cherche N sous la forme $(n - 2)(an + b)$:

$$(n-2)(3n+b) = 3n^2 + bn - 6n - 2b = 3n^2 + (b-6)n - 2b$$

Par identification avec $3n^2 - n - 10$:

$$b - 6 = -1 \Leftrightarrow b = 5$$

$$-2b = -10 \Leftrightarrow b = 5$$

$$N = (n-2)(3n+5)$$

2. Pour quelle(s) valeur(s) de n le nombre N est-il premier ?

Recherche des n tels que N soit premier.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $3n+5 \geq 5 > 1$: ce facteur est toujours un entier strictement supérieur à 1.

Comme $N = (n-2)(3n+5)$, les entiers $|n-2|$ et $3n+5$ divisent N .

Pour que N soit premier, il faut d'abord que $N > 0$, donc $n-2 > 0$, soit $n \geq 3$.

Alors N admet pour diviseurs $n-2$ et $3n+5$, tous deux positifs. Puisque $3n+5 \geq 14 > 1$, ce facteur ne peut pas valoir 1. Il faut donc que l'autre facteur vaille 1 :

$$n-2 = 1 \Leftrightarrow n = 3$$

Vérification : pour $n = 3$, $N = 1 \times (3 \times 3 + 5) = 14 = 2 \times 7$.

14 n'est pas premier.

Pour $n \geq 4$, on a $n-2 \geq 2$ et $3n+5 \geq 17$: N est le produit de deux entiers tous deux ≥ 2 , donc N n'est pas premier.

Pour $n \in \{0, 1\}$: $N = -10$ et $N = -8$, négatifs, donc non premiers. Pour $n = 2$, $N = 0$, non premier.

Conclusion : il n'existe aucune valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle N est premier.

Exercice n°4 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = n^2 + 5n + 6$.

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

« Il existe une valeur de n pour laquelle N est un nombre premier. »

Étape 1 : factorisation de N .

Le trinôme $x^2 + 5x + 6$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, et pour racines :

$$x_1 = \frac{-5-1}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$\text{Donc : } N = (n+2)(n+3)$$

Étape 2 : étude des facteurs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n+2 \geq 2$ et $n+3 \geq 3$

Ainsi N s'écrit comme un produit de deux entiers naturels tous deux supérieurs ou égaux à 2.

Étape 3 : conclusion.

N admet donc au moins un diviseur, $n+2$, tel que $1 < n+2 < N$ (en effet $N = (n+2)(n+3) > n+2$ car $n+3 > 1$).

N possède donc au moins trois diviseurs distincts : 1, $n+2$ et N . Il n'est pas premier.

La proposition est FAUSSE : pour tout $n \in \mathbb{N}$, N n'est jamais premier.

Exercice n°5 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = 2n^2 - 5n - 3$.

1. Factoriser N par $(n-3)$.

Pour $n = 3$: $N = 2 \times 9 - 15 - 3 = 18 - 18 = 0$. Donc $(n-3)$ divise N .

On pose $N = (n-3)(2n+b)$: $(n-3)(2n+b) = 2n^2 + bn - 6n - 3b = 2n^2 + (b-6)n - 3b$

Identification avec $2n^2 - 5n - 3$:

$$b - 6 = -5 \Leftrightarrow b = 1$$

$$-3b = -3 \Leftrightarrow b = 1$$

$$N = (n-3)(2n+1)$$

2. Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles N est un nombre premier.

Valeurs de n rendant N premier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n+1 \geq 1$.

Cas $n \leq 2$: $n-3 < 0$ et $2n+1 > 0$ donc $N < 0$: N n'est pas premier.

(Détail : $n = 0 \Rightarrow N = -3$; $n = 1 \Rightarrow N = -6$; $n = 2 \Rightarrow N = -9$.)

Cas $n = 3$: $N = 0$, non premier.

Cas $n \geq 4$: alors $n - 3 \geq 1$ et $2n + 1 \geq 9 \geq 2$.

N est le produit de deux entiers positifs. Comme $2n + 1 \geq 9 > 1$, pour que N soit premier il est nécessaire que l'autre facteur soit égal à 1 :

$$n - 3 = 1 \Leftrightarrow n = 4$$

Vérification : pour $n = 4$, $N = 1 \times 9 = 9 = 3^2$. 9 n'est pas premier.

Pour $n \geq 5$: $n - 3 \geq 2$ et $2n + 1 \geq 11$, donc N est le produit de deux entiers ≥ 2 : il n'est pas premier.

Conclusion : N n'est premier pour aucune valeur de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°6 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = n^2 - 6n + 8$.

1. Factoriser N .

Discriminant : $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 2$.

Racines : $x_1 = \frac{6-2}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$.

$$N = (n - 2)(n - 4)$$

2. Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles N est un nombre premier.

Valeurs de n rendant N premier.

$n = 0$: $N = (-2) \times (-4) = 8 = 2^3$, non premier.

$n = 1$: $N = (-1) \times (-3) = 3$. 3 est premier !

$n = 2$: $N = 0$, non premier.

$n = 3$: $N = 1 \times (-1) = -1$, non premier.

$n = 4$: $N = 0$, non premier.

$n = 5$: $N = 3 \times 1 = 3$. 3 est premier !

$n \geq 6$: alors $n - 2 \geq 4$ et $n - 4 \geq 2$. N est le produit de deux entiers tous deux ≥ 2 , donc N n'est pas premier.

Conclusion : N est premier uniquement pour $n = 1$ et $n = 5$ (et vaut alors 3).

3. La proposition « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N = n^2 - 6n + 11$ est un nombre premier » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 36 - 44 = -8 < 0$: il n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$. On ne peut donc pas conclure par factorisation. On cherche un contre-exemple.

Calculons quelques valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	11	6	3	2	3	6	11	18	27	38

Pour $n = 1$: $N = 1 - 6 + 11 = 6 = 2 \times 3$.

6 n'est pas premier : c'est un contre-exemple.

La proposition est FAUSSE.