



Exercice n°1 : Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, celles du point $A(-3 ; 6)$.

Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Exercice n°2 : On considère le point $A(2 ; -5)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On définit les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$.

1. Calculer les coordonnées des points B et C .
2. Que peut-on dire du point A ?

Exercice n°3 : On considère les points $J(3 ; -2)$, $U(-1 ; 5)$ et $L(6 ; 0)$.

Déterminer les coordonnées du point A , image de L par la translation de vecteur $\overrightarrow{JU}$.

Exercice n°4 : On considère les points $E(-1 ; 5)$, $F(2 ; -3)$ et $G(4 ; 1)$.

Déterminer les coordonnées du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.

Exercice n°5 : On considère les points $A(-1 ; 2)$, $B(3 ; 5)$ et $C(6 ; 1)$.

1. Quelles sont les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?
2. Prouver que $ABCD$ est aussi un losange.

Exercice n°6 : On considère les points $A(-4 ; 7)$ et $M(2 ; -1)$.

Déterminer les coordonnées du point B tel que M soit le milieu du segment $[AB]$.

Exercice n°7 : On considère les points $H(-2 ; 3)$ et $U(1 ; -2)$.

Déterminer les coordonnées du point M tel que M soit le symétrique de H par rapport à U .

Exercice n°8 : On considère les points $A(-2 ; 5)$ et $B(1 ; -1)$.

Quelles sont les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$?

Exercice n°9 : On considère les points $L(1 ; -3)$, $A(-2 ; 4)$ et $N(5 ; 2)$.

1. Quelles sont les coordonnées de $2\overrightarrow{LA}$ et $-3\overrightarrow{AN}$?
2. En déduire les coordonnées de $2\overrightarrow{LA} - 3\overrightarrow{AN}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{NG} = 2\overrightarrow{LA} - 3\overrightarrow{AN}$?

Exercice n°10 : On considère les points $M(3 ; -1)$, $N(-2 ; 5)$ et $P(4 ; 2)$.

Calculer les coordonnées du point Q défini par : $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{PN}$



Correction

Exercice n°1 : Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, celles du point $A(-3; 6)$.

Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Rappel de cours : si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Notons $B(x; y)$. Alors : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x - (-3) \\ y - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3 \\ y - 6 \end{pmatrix}$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées. L'égalité $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ donne donc le système : $\begin{cases} x + 3 = 4 \\ y - 6 = -5 \end{cases}$

On résout chaque équation :

$$x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = 4 - 3 = 1$$

$$y - 6 = -5 \Leftrightarrow y = -5 + 6 = 1$$

Conclusion : $B(1; 1)$.

Vérification : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{u}$.

Exercice n°2 : On considère le point $A(2; -5)$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On définit les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$.

1. Calculer les coordonnées des points B et C .

Coordonnées de B

Notons $B(x; y)$. On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 5 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ équivaut à : $\begin{cases} x - 2 = -6 \\ y + 5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$

Donc $B(-4; -1)$.

Coordonnées de C

Attention : ici c'est $\overrightarrow{CA}$ (et non $\overrightarrow{AC}$). Notons $C(x'; y')$.

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} x_A - x' \\ y_A - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x' \\ -5 - y' \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{CA} = \vec{u}$ équivaut à : $\begin{cases} 2 - x' = -6 \\ -5 - y' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x' = -8 \\ -y' = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 8 \\ y' = -9 \end{cases}$

Donc $C(8; -9)$.

2. Que peut-on dire du point A ?

Nature du point A

On a $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, donc $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$.

Cela signifie que A est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{u}$, et B est l'image de A par cette même translation. Les points C, A, B sont donc alignés et A est le milieu du segment $[CB]$.

Vérification : milieu de $[CB]$: $\left(\frac{8 + (-4)}{2}; \frac{-9 + (-1)}{2} \right) = \left(\frac{4}{2}; \frac{-10}{2} \right) = (2; -5) = A$.

Exercice n°3 : On considère les points $J(3; -2)$, $U(-1; 5)$ et $L(6; 0)$.

Déterminer les coordonnées du point A , image de L par la translation de vecteur $\overrightarrow{JU}$.

Étape 1 : coordonnées du vecteur $\overrightarrow{JU}$

$$\overrightarrow{JU} = \begin{pmatrix} x_U - x_J \\ y_U - y_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 5 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : traduction de « image par une translation »

Dire que A est l'image de L par la translation de vecteur $\overrightarrow{JU}$ signifie que : $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{JU}$

Étape 3 : résolution

Notons $A(x; y)$. Alors $\overrightarrow{LA} \begin{pmatrix} x-6 \\ y-0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x-6 = -4 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$$

Conclusion : $A(2; 7)$

Remarque : $JUAL$ est un parallélogramme (puisque $\overrightarrow{JU} = \overrightarrow{LA}$).

Exercice n°4 : On considère les points $E(-1; 5)$, $F(2; -3)$ et $G(4; 1)$.

Déterminer les coordonnées du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.

Rappel de cours : $EFGH$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ (les côtés $[EF]$ et $[HG]$ sont parallèles et de même longueur, dans le même sens).

Étape 1 : coordonnées de $\overrightarrow{EF}$

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ -3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : on pose $H(x; y)$

$$\overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} 4 - x \\ 1 - y \end{pmatrix}$$

Étape 3 : égalité des coordonnées

$$\begin{cases} 4 - x = 3 \\ 1 - y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -1 \\ -y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases}$$

Conclusion : $H(1; 9)$

Vérification par les diagonales : dans un parallélogramme $EFGH$, les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu.

$$\text{Milieu de } [EG] : \left(\frac{-1+4}{2}; \frac{5+1}{2} \right) = (1,5; 3)$$

$$\text{Milieu de } [FH] : \left(\frac{2+1}{2}; \frac{-3+9}{2} \right) = (1,5; 3)$$

Exercice n°5 : On considère les points $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$ et $C(6; 1)$.

1. Quelles sont les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ?

Coordonnées de D

$ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Posons $D(x; y)$: $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 6 - x \\ 1 - y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 6 - x = 4 \\ 1 - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Donc : $D(2; -2)$

2. Prouver que $ABCD$ est aussi un losange.

Rappel : un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Rappel de la formule de distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Calculons AB :

$$AB = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Calculons BC :

$$BC = \sqrt{(6 - 3)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Donc $AB = BC = 5$.

Conclusion : $ABCD$ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont de même longueur : c'est un losange.

Exercice n°6 : On considère les points $A(-4; 7)$ et $M(2; -1)$.

Déterminer les coordonnées du point B tel que M soit le milieu du segment $[AB]$.

M milieu de $[AB]$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 2 - (-4) \\ -1 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2 = 6 \\ y + 1 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -9 \end{cases}$$

On retrouve bien $B(8 ; -9)$.

Exercice n°7 : On considère les points $H(-2 ; 3)$ et $U(1 ; -2)$.

Déterminer les coordonnées du point M tel que M soit le symétrique de H par rapport à U .

Dire que M est le symétrique de H par rapport au point U signifie que U est le **milieu** du segment $[HM]$.

C'est équivalent à l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{HU} = \overrightarrow{UM}$.

Étape 1 : coordonnées de $\overrightarrow{HU}$

$$\overrightarrow{HU} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ -2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : on pose $M(x ; y)$

$$\overrightarrow{UM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 2 \end{pmatrix}$$

Étape 3 : résolution

$$\begin{cases} x - 1 = 3 \\ y + 2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -7 \end{cases}$$

Conclusion : $M(4 ; -7)$

Exercice n°8 : On considère les points $A(-2 ; 5)$ et $B(1 ; -1)$.

Quelles sont les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$?

Étape 1 : coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ -1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : coordonnées de $-3\overrightarrow{AB}$

Rappel : si $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et k un réel, alors $k\vec{v} \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$.

$$-3\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \times 3 \\ -3 \times (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Étape 3 : détermination de C

Posons $C(x ; y)$: $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2 = -9 \\ y - 5 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 23 \end{cases}$$

Conclusion : $C(-11 ; 23)$.

Interprétation : les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc A, B, C sont alignés. Le coefficient étant négatif, C et B sont de part et d'autre de A , et $AC = 3AB$.

Exercice n°9 : On considère les points $L(1 ; -3)$, $A(-2 ; 4)$ et $N(5 ; 2)$.

1. Quelles sont les coordonnées de $2\overrightarrow{LA}$ et $-3\overrightarrow{AN}$?

$$\overrightarrow{LA} \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 4 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\overrightarrow{LA} \begin{pmatrix} 2 \times (-3) \\ 2 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} 5 - (-2) \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow -3\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} -3 \times 7 \\ -3 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. En déduire les coordonnées de $2\overrightarrow{LA} - 3\overrightarrow{AN}$.

$$2\overrightarrow{LA} - 3\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} -6 + (-21) \\ 14 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ 20 \end{pmatrix}$$

3. Quelles sont les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{NG} = 2\overrightarrow{LA} - 3\overrightarrow{AN}$?

Posons $G(x ; y)$. Alors : $\overrightarrow{NG} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 2 \end{pmatrix}$

L'égalité $\overrightarrow{NG} = 2\overrightarrow{LA} - 3\overrightarrow{AN}$ donne : $\begin{cases} x - 5 = -27 \\ y - 2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -22 \\ y = 22 \end{cases}$

Conclusion : $G(-22 ; 22)$.

Exercice n°10 : On considère les points $M(3 ; -1)$, $N(-2 ; 5)$ et $P(4 ; 2)$.

Calculer les coordonnées du point Q défini par : $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{PN}$

Étape 1 : coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ et de $-2\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow -2\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : coordonnées de $\overrightarrow{PN}$ et de $3\overrightarrow{PN}$

$$\overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} -2 - 4 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} -18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Étape 3 : somme

$$-2\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} 10 + (-18) \\ -12 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Étape 4 : coordonnées de Q

Posons $Q(x ; y)$. Alors : $\overrightarrow{MQ} \begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 1 \end{pmatrix}$

L'égalité $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{PN}$ donne : $\begin{cases} x - 3 = -8 \\ y + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}$

Conclusion : $Q(-5 ; -4)$.