



Déterminer la loi de probabilité

Exercice n°1 : On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6.

On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la valeur du plus **petit** numéro obtenu sur les deux dés.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice n°2 : Léa propose le jeu suivant avec une pièce truquée (on estime qu'elle a 65 % de chance de tomber sur Face).

On mise 15 €, puis on lance la pièce trois fois successivement.

On gagne 10 € par Face obtenu sur les trois lancers.

1. Calculer la probabilité de gagner exactement 15 € à ce jeu (mise déduite).

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain à ce jeu (mise déduite).

Calcul des probabilités :

Exercice n°3 : Hugo a écrit chacun des mots de la phrase « *La vie est un mystère qu'il faut vivre, et non un problème à résoudre* » sur des cartons qu'il met dans une urne.

Il tire au hasard un carton.

On considère la variable aléatoire N qui associe à chaque issue le nombre de lettres du mot écrit sur le carton.

Déterminer la loi de probabilité de N .

Exercice n°4 : Une urne contient quarante boules numérotées de 1 à 40. On tire au hasard une boule.

Si le numéro de la boule est compris entre 1 et 20, on perd 5 €. S'il est compris entre 21 et 35, on gagne 8 €.

Sinon on gagne 60 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à chaque boule tirée au sort.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X .

x_i	-5	...	...
$P(X = x_i)$	...	...	...

Exercice n°5 : Dans un lycée, il y a 400 élèves en terminale.

Le tableau de répartition des notes obtenues à un devoir commun est le suivant.

Note sur 20	8	12	15	18
Nombre d'élèves	60	180	120	40

On note Y la variable aléatoire donnant la note obtenue par un élève tiré au sort dans le lycée.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par Y ?

2. Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de Y .

Il y a 400 élèves au total.

Exercice n°6 :

1. On lance un dé équilibré comportant 6 faces. Si la face indique un nombre pair, on gagne 4 €, sinon on perd la valeur en euros du numéro de la face.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain algébrique à ce jeu.

2. On considère une urne comportant des boules de couleur rouge, orange ou grise et sur lesquelles sont inscrits des motifs (cercle ou étoile). Il y a 60 boules dans l'urne dont 8 sont rouges avec des cercles. La composition globale de l'urne est donnée par le tableau suivant.

	Rouge	Orange	Grise	Total
Cercle	8	12	10	30
Étoile	7	13	10	30
Total	15	25	20	60

On mise 80 € puis on tire au hasard une boule dans l'urne.

On gagne 150 € si c'est une boule rouge avec un cercle, 100 € si c'est une boule grise avec une étoile, 90 € si c'est une boule orange avec un cercle, et on ne gagne rien dans tous les autres cas.

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y modélisant la situation (gain net, mise déduite).

Exercice n°7 : On lance trois dés équilibrés à 4 faces numérotées de 1 à 4.

On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la somme des trois numéros obtenus.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice n°8 : Un sac contient trente jetons numérotés de 1 à 30. On tire au hasard un jeton.

Si le numéro est un multiple de 5, on gagne 20 €. Si le numéro est un multiple de 3 (mais pas de 5), on gagne 8 €.

Sinon, on perd 4 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à chaque tirage.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

2. Déterminer la loi de probabilité de X .



Déterminer la loi de probabilité

Correction

Exercice n°1 : On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6.

On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la valeur du plus **petit** numéro obtenu sur les deux dés.

Déterminer la loi de probabilité de X .

L'univers comporte $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables.

X peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Pour $X = k$, il faut qu'au moins un dé affiche k et qu'aucun dé n'affiche une valeur inférieure à k .

On compte le nombre d'issues où le minimum vaut k : ce sont les couples (a, b) avec $a, b \geq k$, moins ceux avec $a, b \geq k + 1$.

Nombre d'issues avec $\min = k$: $(6 - k + 1)^2 - (6 - k)^2$

$$\Rightarrow P(X = 1) = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$$

$$\Rightarrow P(X = 2) = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow P(X = 3) = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\Rightarrow P(X = 4) = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\Rightarrow P(X = 5) = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow P(X = 6) = 1^2 - 0^2 = 1$$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exercice n°2 : Léa propose le jeu suivant avec une pièce truquée (on estime qu'elle a 65 % de chance de tomber sur Face).

On mise 15 €, puis on lance la pièce trois fois successivement.

On gagne 10 € par Face obtenu sur les trois lancers.

1. Calculer la probabilité de gagner exactement 15 € à ce jeu (mise déduite).

Soit F le nombre de Face obtenus sur les 3 lancers. F suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,65$.

Le gain avant mise est $10F$, donc $X = 10F - 15$.

Valeurs possibles de F : 0, 1, 2, 3 $\rightarrow$ valeurs de X : -15, -5, 5, 15

$$X = 15 \Leftrightarrow F = 3$$

$$P(F = 3) = 0,65^3 = 0,274625$$

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain à ce jeu (mise déduite).

Calcul des probabilités :

$$\Rightarrow P(F = 0) = 0,35^3 = 0,042875$$

$$\Rightarrow P(F = 1) = 3 \times 0,65 \times 0,35^2 = 0,238875$$

$$\Rightarrow P(F = 2) = 3 \times 0,65^2 \times 0,35 = 0,443625$$

$$\Rightarrow P(F = 3) = 0,65^3 = 0,274625$$

x_i	-15	-5	5	15
$P(X = x_i)$	0,042875	0,238875	0,443625	0,274625

Exercice n°3 : Hugo a écrit chacun des mots de la phrase « *La vie est un mystère qu'il faut vivre, et non un problème à résoudre* » sur des cartons qu'il met dans une urne.

Il tire au hasard un carton.

On considère la variable aléatoire N qui associe à chaque issue le nombre de lettres du mot écrit sur le carton.

Déterminer la loi de probabilité de N .

Décomposons la phrase en mots avec leur nombre de lettres :

La (2) vie (3) est (3) un (2) mystère (7) qu'il (4) faut (4) vivre (5) et (2) non (3) un (2) problème (8) à (1) résoudre(8).

Soit 14 mots au total.

Regroupons par nombre de lettres :

- ✂ 1 lettre : à → 1 mot
- ✂ 2 lettres : La, un, et, un → 4 mots
- ✂ 3 lettres : vie, est, non → 3 mots
- ✂ 4 lettres : qu'il, faut → 2 mots
- ✂ 5 lettres : vivre → 1 mot
- ✂ 7 lettres : mystère → 1 mot
- ✂ 8 lettres : problème, résoudre → 2 mots

n_i	1	2	3	4	5	7	8
$P(N = n_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$

Exercice n°4 : Une urne contient quarante boules numérotées de 1 à 40. On tire au hasard une boule.

Si le numéro de la boule est compris entre 1 et 20, on perd 5 €. S'il est compris entre 21 et 35, on gagne 8 €.

Sinon on gagne 60 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à chaque boule tirée au sort.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

X peut prendre les valeurs -5, 8 et 60.

2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X .

x_i	-5	...	...
$P(X = x_i)$	...	...	...

Répartition des boules :

- ✂ Numéros 1 à 20 : 20 boules → gain -5€
- ✂ Numéros 21 à 35 : 15 boules → gain 8€
- ✂ Numéros 36 à 40 : 5 boules → gain 60€

Il y a 40 boules équiprobables au total.

x_i	-5	8	60
$P(X = x_i)$	$\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$	$\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$	$\frac{5}{40} = \frac{1}{8}$

Exercice n°5 : Dans un lycée, il y a 400 élèves en terminale.

Le tableau de répartition des notes obtenues à un devoir commun est le suivant.

Note sur 20	8	12	15	18
Nombre d'élèves	60	180	120	40

On note Y la variable aléatoire donnant la note obtenue par un élève tiré au sort dans le lycée.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par Y ?

Y peut prendre les valeurs 8, 12, 15 et 18.

2. Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de Y .

Il y a 400 élèves au total.

y_i	8	12	15	18
$P(Y = y_i)$	$\frac{60}{400} = \frac{3}{20}$	$\frac{180}{400} = \frac{9}{20}$	$\frac{120}{400} = \frac{3}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$

Exercice n°6 :

1. On lance un dé équilibré comportant 6 faces. Si la face indique un nombre pair, on gagne 4 €, sinon on perd la valeur en euros du numéro de la face.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain algébrique à ce jeu.

Les faces sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, chacune de probabilité $\frac{1}{6}$.

↪ Faces paires (2, 4, 6) : gain = +4€

↪ Face 1 : gain = -1€

↪ Face 3 : gain = -3€

Face 5 : gain = -5€

x_i	-5	-3	-1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. On considère une urne comportant des boules de couleur rouge, orange ou grise et sur lesquelles sont inscrits des motifs (cercle ou étoile). Il y a 60 boules dans l'urne dont 8 sont rouges avec des cercles. La composition globale de l'urne est donnée par le tableau suivant.

	Rouge	Orange	Grise	Total
Cercle	8	12	10	30
Étoile	7	13	10	30
Total	15	25	20	60

On mise 80 € puis on tire au hasard une boule dans l'urne.

On gagne 150 € si c'est une boule rouge avec un cercle, 100 € si c'est une boule grise avec une étoile, 90 € si c'est une boule orange avec un cercle, et on ne gagne rien dans tous les autres cas.

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y modélisant la situation (gain net, mise déduite).

Il y a 60 boules équiprobables. La mise est de 80 €.

↪ Rouge + cercle (8 boules) : gain brut 150 € → gain net $150 - 80 = 70$ €

↪ Grise + étoile (10 boules) : gain brut 100 € → gain net $100 - 80 = 20$ €

↪ Orange + cercle (12 boules) : gain brut 90 € → gain net $90 - 80 = 10$ €

↪ Autres cas ($60 - 8 - 10 - 12 = 30$ boules) : gain brut 0 € → gain net -80€

y_i	-80	10	20	70
$P(Y = y_i)$	$\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$	$\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$	$\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$	$\frac{8}{60} = \frac{2}{15}$

Exercice n°7 : On lance trois dés équilibrés à 4 faces numérotées de 1 à 4.

On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la somme des trois numéros obtenus.

Déterminer la loi de probabilité de X .

L'univers comporte $4^3 = 64$ issues équiprobables.

X peut prendre les valeurs entières de 3 à 12.

On dénombre les triplets (a, b, c) avec $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$ pour chaque somme :

↗ $X = 3$: (1,1,1) → 1 façon

↗ $X = 4$: (1,1,2) et permutations → 3 façons

↗ $X = 5$: (1,1,3), (1,2,2) et permutations → $3+3=6$ façons

↗ $X = 6$: (1,1,4), (1,2,3), (2,2,2) → $3+6+1=10$ façons

↗ $X = 7$: (1,2,4), (1,3,3), (2,2,3) → $6+3+3=12$ façons

↗ $X = 8$: (1,3,4), (2,2,4), (2,3,3) → $6+3+3=12$ façons

↗ $X = 9$: (1,4,4), (2,3,4), (3,3,3) → $3+6+1=10$ façons

↗ $X = 10$: (2,4,4), (3,3,4) → $3+3=6$ façons

↗ $X = 11$: (3,4,4) → 3 façons

↗ $X = 12$: (4,4,4) → 1 façon

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$

Exercice n°8 : Un sac contient trente jetons numérotés de 1 à 30. On tire au hasard un jeton.

Si le numéro est un multiple de 5, on gagne 20 €. Si le numéro est un multiple de 3 (mais pas de 5), on gagne 8 €.

Sinon, on perd 4 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à chaque tirage.

1. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

X peut prendre les valeurs -4, 8 et 20.

2. Déterminer la loi de probabilité de X .

Dénombrons les jetons dans chaque catégorie parmi les 30 jetons :

↗ Multiples de 5 entre 1 et 30 : 5, 10, 15, 20, 25, 30 → **6 jetons** → gain 20€

↗ Multiples de 3 non multiples de 5 : 3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27 (on exclut 15 et 30) → **8 jetons** → gain 8€

↗ Autres jetons : $30 - 6 - 8 = 16$ jetons → gain -4€

x_i	-4	8	20
$P(X = x_i)$	$\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$