



~~~~~  
**Exercice n°1 :** Montrer que le carré de tout nombre pair est pair.

**Exercice n°2 :** Démontrer que tout multiple de 9 est également un multiple de 3.

**Exercice n°3 :** Démontrer que le produit d'un multiple de 2 par un multiple de 13 est toujours un multiple de 26.

**Exercice n°4 :** Démontrer que la somme de deux multiples de 5 est encore un multiple de 5.

**Exercice n°5 :** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers. Déterminer la parité de la somme  $a + b$  dans chacun des cas suivants, en justifiant par une démonstration.

- a)  $a$  et  $b$  sont tous les deux pairs.
- b)  $a$  et  $b$  sont tous les deux impairs.
- c)  $a$  est pair et  $b$  est impair.

**Exercice n°6 :** Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

**Exercice n°7 :** Soit  $a$  un nombre entier. Démontrer que la somme de deux multiples de  $a$  est encore un multiple de  $a$ .

**Exercice n°8 :** Soit  $a$  un entier. Démontrer, en utilisant un raisonnement par contraposée, que si  $a^2$  est pair alors  $a$  est pair.

**Exercice n°9 :** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres impairs. Démontrer que la somme de leurs carrés,  $a^2 + b^2$ , est un nombre pair.

**Exercice n°10 :** Démontrer que le cube d'un nombre impair est un nombre impair.

**Exercice n°11 :** Soit  $n$  un entier naturel.

1. Démontrer que si  $n$  est impair, alors  $n^2 - 1$  est divisible par 8.
  2. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , le nombre  $2^n + 2^{n+1}$  est divisible par 3.
- ~~~~~



### Correction

**Exercice n°1 :** Montrer que le carré de tout nombre pair est pair.

Soit  $n$  un nombre pair, alors il existe un entier  $k$  tel que  $n = 2 \times k$ .

$$n^2 = (2k)^2 = 2^2 \times k^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$$

Comme  $k$  est un entier,  $2k^2$  est également un entier donc  $n^2$  est pair.

**Exercice n°2 :** Démontrer que tout multiple de 9 est également un multiple de 3.

Un entier  $n$  est un multiple de 9 s'il existe un entier  $k$  tel que  $n = 9k$ .

Soit  $n$  un multiple de 9 quelconque.

Par définition, il existe un entier  $k$  tel que :

$$n = 9k$$

Or  $9 = 3 \times 3$ , donc :

$$n = 3 \times 3 \times k = 3 \times (3k)$$

Posons  $k' = 3k$ . Comme  $k$  est un entier,  $3k$  est aussi un entier, donc  $k'$  est un entier.

On a alors  $n = 3k'$  avec  $k'$  entier : cela signifie exactement que  $n$  est un multiple de 3.

**Conclusion :** tout multiple de 9 est un multiple de 3.

**Exercice n°3 :** Démontrer que le produit d'un multiple de 2 par un multiple de 13 est toujours un multiple de 26.

Soit  $a$  un multiple de 2 et  $b$  un multiple de 13.

Par définition :

↳ il existe un entier  $k$  tel que  $a = 2k$ ;

↳ il existe un entier  $k'$  tel que  $b = 13k'$ .

Calculons le produit :  $a \times b = 2k \times 13k' = (2 \times 13) \times (k \times k') = 26 \times (kk')$

Posons  $K = kk'$ . Comme  $k$  et  $k'$  sont des entiers, leur produit  $K$  est un entier.

On obtient  $a \times b = 26K$  avec  $K$  entier : c'est la définition d'un multiple de 26.

**Conclusion :** le produit d'un multiple de 2 et d'un multiple de 13 est un multiple de 26.

**Exercice n°4 :** Démontrer que la somme de deux multiples de 5 est encore un multiple de 5.

Soient  $a$  et  $b$  deux multiples de 5.

Par définition, il existe deux entiers  $k$  et  $k'$  tels que :  $a = 5k$  et  $b = 5k'$

Calculons la somme :  $a + b = 5k + 5k'$

En factorisant par 5 :  $a + b = 5(k + k')$

Posons  $K = k + k'$ . Comme  $k$  et  $k'$  sont des entiers, leur somme  $K$  est un entier.

On a donc  $a + b = 5K$  avec  $K$  entier :  $a + b$  est bien un multiple de 5.

**Conclusion :** la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5.

**Exercice n°5 :** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers. Déterminer la parité de la somme  $a + b$  dans chacun des cas suivants, en justifiant par une démonstration.

a)  $a$  et  $b$  sont tous les deux pairs.

Il existe des entiers  $k$  et  $k'$  tels que  $a = 2k$  et  $b = 2k'$ .

$$a + b = 2k + 2k' = 2(k + k')$$

Comme  $k + k'$  est un entier,  $a + b$  s'écrit sous la forme  $2 \times (\text{entier})$ .

La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

b)  $a$  et  $b$  sont tous les deux impairs.

Il existe des entiers  $k$  et  $k'$  tels que  $a = 2k + 1$  et  $b = 2k' + 1$ .

$$a + b = (2k + 1) + (2k' + 1) = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1)$$

Comme  $k + k' + 1$  est un entier,  $a + b$  est de la forme  $2 \times (\text{entier})$ .

La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

c)  $a$  est pair et  $b$  est impair.

Il existe des entiers  $k$  et  $k'$  tels que  $a = 2k$  et  $b = 2k' + 1$ .

$$a + b = 2k + 2k' + 1 = 2(k + k') + 1$$

Comme  $k + k'$  est un entier,  $a + b$  est de la forme  $2 \times (\text{entier}) + 1$ .

La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

**Exercice n°6 :** Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Soit  $n$  un entier impair.

Par définition, il existe un entier  $k$  tel que :  $n = 2k + 1$

Calculons  $n^2$  en utilisant l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Factorisons par 2 les deux premiers termes :  $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

Posons  $K = 2k^2 + 2k$ . Comme  $k$  est un entier,  $K$  est un entier.

On a donc  $n^2 = 2K + 1$  avec  $K$  entier :  $n^2$  est impair.

**Conclusion :** le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

**Exercice n°7 :** Soit  $a$  un nombre entier. Démontrer que la somme de deux multiples de  $a$  est encore un multiple de  $a$ .

Soient  $m$  et  $n$  deux multiples de  $a$ .

Par définition, il existe deux entiers  $k$  et  $k'$  tels que :  $m = ak$  et  $n = ak'$

Calculons la somme :  $m + n = ak + ak'$

En factorisant par  $a$  :  $m + n = a(k + k')$

Posons  $K = k + k'$  : c'est un entier, comme somme de deux entiers.

Ainsi  $m + n = aK$  avec  $K$  entier :  $m + n$  est bien un multiple de  $a$ .

**Conclusion :** la somme de deux multiples de  $a$  est un multiple de  $a$ .

**Exercice n°8 :** Soit  $a$  un entier. Démontrer, en utilisant un raisonnement par contraposée, que si  $a^2$  est pair alors  $a$  est pair.

**Rappel sur la contraposée :** la proposition « si  $P$  alors  $Q$  » est **équivalente** à sa contraposée « si non  $Q$  alors non  $P$  ». Démontrer l'une revient donc à démontrer l'autre.

**Identification :**

↳  $P$  : «  $a^2$  est pair »

↳  $Q$  : «  $a$  est pair »

La contraposée à démontrer est donc : « si  $a$  n'est pas pair, alors  $a^2$  n'est pas pair »

c'est-à-dire : « si  $a$  est impair, alors  $a^2$  est impair »

**Démonstration de la contraposée :**

Supposons  $a$  impair. Il existe alors un entier  $k$  tel que  $a = 2k + 1$ .

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\text{entier}} + 1$$

Donc  $a^2$  s'écrit sous la forme  $2K + 1$  avec  $K = 2k^2 + 2k$  entier :  $a^2$  est impair.

**Conclusion :** la contraposée est vraie, donc la proposition initiale l'est aussi :

si  $a^2$  est pair, alors  $a$  est pair.

**Exercice n°9 :** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres impairs. Démontrer que la somme de leurs carrés,  $a^2 + b^2$ , est un nombre pair.

$a$  et  $b$  étant impairs, il existe deux entiers  $k$  et  $k'$  tels que :  $a = 2k + 1$  et  $b = 2k' + 1$

Calculons chaque carré :  $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$$b^2 = (2k' + 1)^2 = 4k'^2 + 4k' + 1$$

D'où la somme :  $a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 4k^2 + 4k + 4k'^2 + 4k' + 2$

Factorisons par 2 :  $a^2 + b^2 = 2(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1)$

Posons  $K = 2k^2 + 2k + 2k'^2 + 2k' + 1$  : c'est un entier.

Donc  $a^2 + b^2 = 2K$  : la somme est paire.

**Exercice n°10 :** Démontrer que le cube d'un nombre impair est un nombre impair.

Soit  $n$  un entier impair : il existe un entier  $k$  tel que  $n = 2k + 1$ .

Développons  $n^3$  à l'aide de l'identité  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ :

$$n^3 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$$

Factorisons par 2 les trois premiers termes :  $n^3 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$

Posons  $K = 4k^3 + 6k^2 + 3k$  : c'est un entier.

Donc  $n^3 = 2K + 1$  :  $n^3$  est impair.

**Exercice n°11 :** Soit  $n$  un entier naturel.

1. Démontrer que si  $n$  est impair, alors  $n^2 - 1$  est divisible par 8.

Si  $n$  est impair, alors  $8 \mid n^2 - 1$

Supposons  $n$  impair : il existe un entier naturel  $k$  tel que  $n = 2k + 1$ .

Calculons :  $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k$

Factorisons par  $4k$  :  $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$

Point clé :  $k$  et  $k + 1$  sont deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair. Leur produit

$k(k + 1)$  est donc pair : il existe un entier  $m$  tel que  $k(k + 1) = 2m$

On en déduit :  $n^2 - 1 = 4 \times 2m = 8m$  avec  $m$  entier.

Conclusion :  $n^2 - 1$  est divisible par 8.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , le nombre  $2^n + 2^{n+1}$  est divisible par 3.

Utilisons la règle des puissances :  $2^{n+1} = 2^n \times 2$ .

Ainsi :  $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2 \times 2^n$

Factorisons par  $2^n$  :  $2^n + 2^{n+1} = 2^n \times (1 + 2) = 3 \times 2^n$

Comme  $n$  est un entier naturel,  $2^n$  est un entier.

Le nombre  $2^n + 2^{n+1}$  s'écrit donc sous la forme  $3 \times (\text{entier})$ .

Conclusion :  $2^n + 2^{n+1}$  est divisible par 3 pour tout entier naturel  $n$ .