



Exercice n°1 :

1. Décomposer 3 240 en produit de facteurs premiers.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que n^2 soit un multiple de 3 240.

Exercice n°2 : À l'aide de la décomposition en facteurs premiers de 60, résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :
$$x(x + 1)(x + 2) = 60.$$

Exercice n°3 :

1. Décomposer en produit de facteurs premiers : 4 620 et 10 780.
2. En déduire PGCD(4 620 ; 10 780) et PPCM(4 620 ; 10 780).

Exercice n°4 :

1. Déterminer PGCD(7 700 ; 4 620) à l'aide :
 - a) d'une décomposition en facteurs premiers ;
 - b) de l'algorithme d'Euclide.
2. Quelle est la méthode la plus « économe » en opérations ?

Exercice n°5 :

1. Déterminer PGCD(6 293 ; 4 807) à l'aide :
 - a) d'une décomposition en facteurs premiers ;
 - b) de l'algorithme d'Euclide.
2. Quelle est la méthode la plus « économe » en opérations ?

Exercice n°6 : Dans un catalogue de moins de 500 pages sont référencés 244 987 articles. Chaque page contient le même nombre d'articles.

1. Montrer que 491 est un nombre premier.
2. Combien de pages contient ce catalogue ?



Correction

Exercice n°1 :

1. Décomposer 3 240 en produit de facteurs premiers.

On divise successivement par les nombres premiers, en commençant par les plus petits.

$$3\,240 = 2 \times 1\,620$$

$$1\,620 = 2 \times 810$$

$$810 = 2 \times 405$$

$$405 = 3 \times 135$$

$$135 = 3 \times 45$$

$$45 = 3 \times 15$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$5 = 5 \times 1$$

$$\text{Donc : } 3\,240 = 2^3 \times 3^4 \times 5$$

2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que n^2 soit un multiple de 3 240.

n^2 est un multiple de 3 240 signifie que $3\,240 \mid n^2$, c'est-à-dire que $2^3 \times 3^4 \times 5$ divise n^2 .

Écrivons la décomposition en facteurs premiers de n sous la forme

$$n = 2^a \times 3^b \times 5^c \times (\text{autres facteurs premiers}),$$

$$\text{alors } n^2 = 2^{2a} \times 3^{2b} \times 5^{2c} \times \dots$$

Or un entier A divise un entier B si et seulement si, pour chaque nombre premier, l'exposant dans A est inférieur ou égal à celui dans B . On doit donc avoir :

$$2a \geq 3, \text{ donc } a \geq 1,5, \text{ donc } a \geq 2 (\text{car } a \text{ est entier}) ;$$

$$2b \geq 4, \text{ donc } b \geq 2;$$

$$2c \geq 1, \text{ donc } c \geq 0,5, \text{ donc } c \geq 1.$$

Pour obtenir le plus petit n , on prend les plus petits exposants possibles et aucun autre facteur premier : $n = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$.

$$n = 180$$

Exercice n°2 : À l'aide de la décomposition en facteurs premiers de 60, résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation :
$$x(x+1)(x+2) = 60.$$

$$\text{Décomposition de 60 : } 60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Le membre de gauche est un produit de trois entiers naturels consécutifs. Il faut donc écrire 60 comme produit de trois entiers consécutifs.

Les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Cherchons trois entiers naturels consécutifs dont le produit vaut 60 :

$$x = 0 : 0 \times 1 \times 2 = 0 \neq 60$$

$$x = 1 : 1 \times 2 \times 3 = 6 \neq 60$$

$$x = 2 : 2 \times 3 \times 4 = 24 \neq 60$$

$$x = 3 : 3 \times 4 \times 5 = 60$$

$$x = 4 : 4 \times 5 \times 6 = 120 > 60$$

Justification de l'arrêt : la fonction $x \mapsto x(x+1)(x+2)$ est strictement croissante sur $[0 + \infty[$; (produit de trois facteurs positifs croissants). Donc dès que la valeur dépasse 60, il n'y a plus de solution possible. L'équation admet donc au plus une solution.

$$S = \{3\}$$

Exercice n°3 :

1. Décomposer en produit de facteurs premiers : 4 620 et 10 780.

Décomposition de 4 620 :

$$4\,620 = 2 \times 2\,310$$

$$2\,310 = 2 \times 1\,155$$

$$1\,155 = 3 \times 385$$

$$385 = 5 \times 77$$

$$77 = 7 \times 11$$

$$4\,620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

Décomposition de 10 780 :

$$10\,780 = 2 \times 5\,390$$

$$5\,390 = 2 \times 2\,695$$

$$2\,695 = 5 \times 539$$

$$539 = 7 \times 77 = 7 \times 7 \times 11$$

$$10\,780 = 2^2 \times 5 \times 7^2 \times 11$$

2. En déduire PGCD(4 620 ; 10 780) et PPCM(4 620 ; 10 780).

PGCD : on prend chaque facteur premier commun affecté du plus petit exposant.

Premier	4 620	10 780	min
2	2^2	2^2	2^2
3	3^1	3^0	3^0
5	5^1	5^1	5^1
7	7^1	7^2	7^1
11	11^1	11^1	11^1

$$\text{PGCD} = 2^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 4 \times 385 = 1\,540$$

PPCM : on prend tous les facteurs premiers avec le plus grand exposant.

$$\text{PPCM} = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 11 = 4 \times 3 \times 5 \times 49 \times 11 = 32\,340$$

$$\text{PGCD}(4\,620 ; 10\,780) = 1\,540 ; \text{PPCM}(4\,620 ; 10\,780) = 32\,340$$

Exercice n°4 :

1. Déterminer PGCD(7 700 ; 4 620) à l'aide :

a) d'une décomposition en facteurs premiers ;

$$7\,700 = 2 \times 3\,850 = 2 \times 2 \times 1\,925 = 2^2 \times 5 \times 385 = 2^2 \times 5 \times 5 \times 77$$

$$7\,700 = 2^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$$

$$4\,620 = 2 \times 2\,310 = 2^2 \times 1\,155 = 2^2 \times 3 \times 385 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

$$4\,620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

Facteurs communs avec le plus petit exposant :

$$\text{PGCD} = 2^2 \times 5^1 \times 7 \times 11 = 4 \times 5 \times 7 \times 11 = 1\,540$$

b) de l'algorithme d'Euclide.

On effectue des divisions euclidiennes successives :

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
7 700	4 620	1	3 080
4 620	3 080	1	1 540
3 080	1 540	2	0

Le dernier reste non nul est 1 540.

$$\text{PGCD}(7\,700 ; 4\,620) = 1\,540$$

2. Quelle est la méthode la plus « économe » en opérations ?

↳ Décomposition en facteurs premiers : il a fallu environ 5 divisions pour 7 700 et 6 divisions pour 4 620, soit une dizaine de divisions, puis une multiplication finale — sans compter les essais infructueux de divisibilité par 3, 7, 13... lorsqu'on cherche les facteurs premiers.

↳ Algorithme d'Euclide : **3 divisions euclidiennes** seulement.

L'**algorithme d'Euclide** est donc nettement plus économe. C'est un résultat général : la décomposition en facteurs premiers devient très coûteuse quand les nombres grandissent, alors que le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide reste faible (il croît comme le nombre de chiffres des nombres).

Exercice n°5 :

1. Déterminer PGCD(6 293 ; 4 807) à l'aide :

a) d'une décomposition en facteurs premiers ;

Décomposition de 6 293

6 293 est impair, non divisible par 3 (car $6 + 2 + 9 + 3 = 20$) et non divisible par 5.

En testant le nombre premier 7, on constate que la division tombe juste :

$$6\,293 \div 7 = 899 \text{ soit } 6\,293 = 7 \times 899.$$

Reste à décomposer 899. Après avoir écarté les petits facteurs premiers (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23), on trouve qu'il est divisible par 29 :

$$899 \div 29 = 31 \text{ soit } 899 = 29 \times 31.$$

On obtient donc la décomposition en facteurs premiers : $6\,293 = 7 \times 29 \times 31$

Décomposition de 4 807

4 807 est impair et la somme de ses chiffres vaut $4 + 8 + 0 + 7 = 19$ (non divisible par 3). Il n'est pas non plus multiple de 5, ni de 7 (car $7 \times 686 = 4\,802$, reste 5).

Appliquons le critère de divisibilité par 11 : $(7 - 0 + 8 - 4) = 11$, qui est un multiple de 11.

Ainsi :

$$4\,807 \div 11 = 437 \text{ soit } 4\,807 = 11 \times 437.$$

Décomposons maintenant 437. Il n'est pas divisible par 13 ($13 \times 33 = 429$), ni par 17 ($17 \times 25 = 425$). En revanche, il est divisible par 19 :

$$437 \div 19 = 23 \text{ soit } 437 = 19 \times 23.$$

On obtient donc la décomposition en facteurs premiers : $4\,807 = 11 \times 19 \times 23$

Comparons les deux décompositions obtenues :

$$6\,293 = 7 \times 29 \times 31$$

$$4\,807 = 11 \times 19 \times 23$$

Les facteurs premiers sont distincts : aucun nombre premier n'apparaît à la fois dans la décomposition de 6 293 et dans celle de 4 807. Leur seul diviseur commun est donc 1.

$$\text{PGCD}(6\,293; 4\,807) = 1$$

Les deux nombres sont premiers entre eux.

b) de l'algorithme d'Euclide.

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
6 293	4 807	1	1 486
4 807	1 486	3	349
1 486	349	4	90

349	90	3	79
90	79	1	11
79	11	7	2
11	2	5	1
2	1	2	0

Dernier reste non nul : 1.

2. Quelle est la méthode la plus « économe » en opérations ?

- ↳ Décomposition : elle a exigé de tester la divisibilité par tous les nombres premiers jusqu'à $\sqrt{899} \approx 30$ et $\sqrt{437} \approx 21$, soit une vingtaine de divisions au total, avec des essais infructueux.
- ↳ Euclide : **8 divisions euclidiennes**, sans aucun tâtonnement.

L'algorithme d'Euclide reste le plus économe et surtout le plus sûr : il ne demande aucune recherche de diviseurs premiers. Ici il est de plus le seul à donner une réponse immédiate au fait que les nombres sont premiers entre eux.

Exercice n°6 : Dans un catalogue de moins de 500 pages sont référencés 244 987 articles. Chaque page contient le même nombre d'articles.

1. Montrer que 491 est un nombre premier.

Pour montrer qu'un entier $N \geq 2$ est premier, il suffit de vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier p tel que $p \leq \sqrt{N}$. En effet, si $N = a \times b$ avec $1 < a \leq b$, alors $a \leq \sqrt{N}$, et a admet un diviseur premier $\leq \sqrt{N}$.

Ici $\sqrt{491} \approx 22,2$. Il suffit donc de tester les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

- 2 : 491 est impair $\rightarrow$ non.
- 3 : $4 + 9 + 1 = 14$, non divisible par 3 $\rightarrow$ non.
- 5 : ne se termine ni par 0 ni par 5 $\rightarrow$ non.
- 7 : $7 \times 70 = 490$, reste 1 $\rightarrow$ non.
- 11 : $4 - 9 + 1 = -4$, non divisible par 11 $\rightarrow$ non.
- 13 : $13 \times 37 = 481$, reste 10 $\rightarrow$ non.
- 17 : $17 \times 28 = 476$, reste 15 $\rightarrow$ non.
- 19 : $19 \times 25 = 475$, reste 16 $\rightarrow$ non.

Aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{491}$ ne divise 491, donc : 491 est premier.

2. Combien de pages contient ce catalogue ?

Notons p le nombre de pages du catalogue et a le nombre d'articles par page. Comme chaque page contient le même nombre d'articles, on a : $p \times a = 244\,987$.

Le nombre de pages p est donc un diviseur de 244 987, avec : $p < 500$.

Décomposons 244 987 :

La somme de ses chiffres vaut : $2 + 4 + 4 + 9 + 8 + 7 = 34$, donc 244 987 n'est pas divisible par 3.

Il est impair et ne se termine ni par 0 ni par 5.

En testant la divisibilité par 17, on obtient : $244\,987 = 17 \times 14\,411$.

Vérifions le calcul : $14\,411 \times 17 = 14\,411 \times (10 + 7) = 144\,110 + 100\,877 = 244\,987$.

Il reste à déterminer si 14 411 est premier.

On a : $120^2 = 14\,400$ et $121^2 = 14\,641$,

donc : $120 < \sqrt{14\,411} < 121$.

Il suffit donc de vérifier que 14 411 n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à 120.

Il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. Pour les autres nombres premiers, les divisions donnent toutes un reste non nul :

Diviseur premier	Reste	Diviseur premier	Reste
7	5	43	6
11	1	47	29
13	7	53	48
17	12	59	15
19	9	61	15
23	13	67	6
29	27	71	69
31	27	73	30
37	18	79	33
41	20	83	52
89	82	103	94
97	55	107	73
101	69	109	23
113	60		

Ainsi, 14 411 est premier. La décomposition en facteurs premiers de 244 987 est donc :

$$244\,987 = 17 \times 14\,411$$

Recherche du nombre de pages

Puisque 17 et 14 411 sont premiers, les diviseurs positifs de 244 987 sont : 1, 17, 14 411, 244 987.

Parmi ceux-ci, les seuls strictement inférieurs à 500 sont 1 et 17.

Si l'on considère, comme le suggère le contexte, que le catalogue comporte plusieurs pages, alors :

$$p = 17.$$

Le nombre d'articles par page est alors :

$$a = \frac{244\,987}{17} = 14\,411.$$

Conclusion : Le catalogue contient 17 pages avec 14 411 articles par page