

Etude de fonctions

I] Généralités sur les fonctions :

1- Définition, notation et vocabulaire :

Définition : Soit D une partie de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Une **fonction** f , définie sur D , est une **relation qui associe à chaque nombre réel x appartenant à D un unique nombre réel, noté $f(x)$.**

L'ensemble D est appelé **ensemble de définition** de la fonction f .

On note :

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Cela signifie que la fonction f est définie de D dans $\mathbb{R}$ et qu'à un réel x , elle associe le réel $f(x)$.

On dit alors que :

- ↪ $f(x)$ est **l'image de x** par la fonction f .
- ↪ x est un **antécédent de $f(x)$** par la fonction f .

Remarque : Il y a une différence entre f et $f(x)$:

- ↪ f est une **fonction** ;
- ↪ $f(x)$ est un **réel** (l'image du réel x).

Exemple : Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ et $g(x) = 3x^2 - 2$.

1) Calculer l'image de -2 par la fonction f .

$$f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) + 1 = 2 \times 4 + 8 + 1 = 8 + 8 + 1 = 17.$$

L'image de -2 est 17.

2) Déterminer les antécédents de 1 par la fonction f .

Antécédents de 1 par f , on résout $f(x) = 1$:

$$2x^2 - 4x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0.$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul :

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Les antécédents de 1 sont donc 0 et 2.

3) Calculer $g(4)$.

$$g(4) = 3 \times 4^2 - 2 = 3 \times 16 - 2 = 48 - 2 = 46.$$

Attention : Par une fonction f , **tout nombre x de l'ensemble de définition possède une seule image $f(x)$.**

En revanche, **un nombre peut avoir plusieurs antécédents, un seul ou aucun.**

Exemple : pour la fonction $f(x) = x^2$: $f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$.

Ainsi, 2 possède une unique image, qui est 4, tandis que 4 possède deux antécédents par f : -2 et 2.

2- Ensemble de définition :

Définition : Soit f une fonction.

L'ensemble de définition de f est **l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.**

Exemple : Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{5x+1}{x-3}$.

Déterminer son ensemble de définition.

La fraction existe si et seulement si son dénominateur est non nul : $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

On ne peut pas calculer $h(3)$.

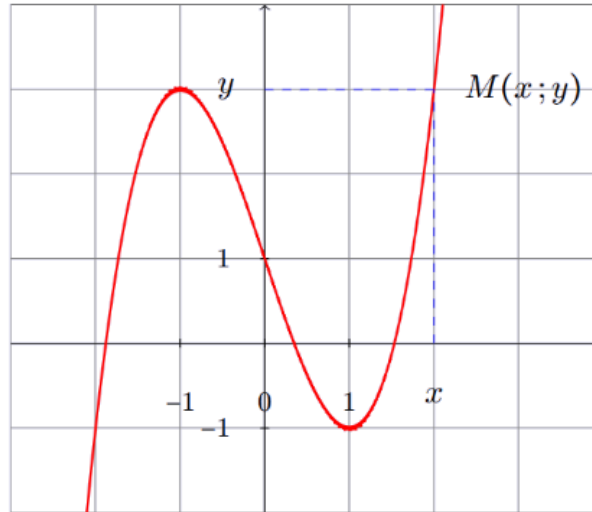
L'ensemble de définition est donc : $D_h = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

3- Courbe représentative :

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f .

Dans un repère orthogonal du plan, on appelle **courbe représentative** de f l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $y = f(x)$.

L'égalité $y = f(x)$ est appelée **équation de la courbe** de f .



4- Fonction paire, fonction impaire :

Définitions : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- ↪ On dit que f est **paire** sur $\mathbb{R}$ si, pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$.
- ↪ On dit que f est **impaire** sur $\mathbb{R}$ si, pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$.

Exemples :

Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 2x^2$ est paire.

Pour tout réel x , on calcule $f(-x)$:
 $f(-x) = 5 - 2(-x)^2 = 5 - 2x^2 = f(x)$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = f(x)$
La fonction f est bien paire sur $\mathbb{R}$.

Montrons que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 2x$ est impaire.

Pour tout réel x , on calcule $g(-x)$:
 $g(-x) = 4(-x)^3 - 2(-x) = -4x^3 + 2x$.

On factorise par -1 :
 $-4x^3 + 2x = -(4x^3 - 2x) = -g(x)$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(-x) = -g(x)$.
La fonction g est bien impaire sur $\mathbb{R}$.

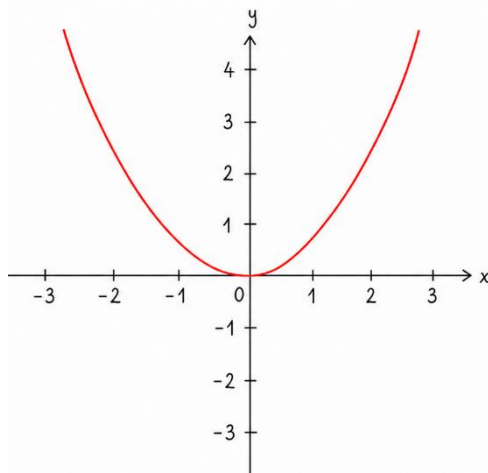
Remarque : Le contraire d'une « fonction paire » n'est pas une « fonction impaire ». La plupart des fonctions n'est ni paire ni impaire.

Propriété : Soit f définie sur $\mathbb{R}$.

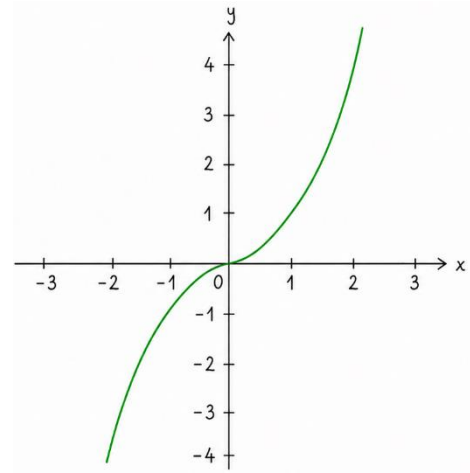
- ↪ Si f est **paire**, sa courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- ↪ Si f est **impaire**, sa courbe est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Exemples :

Fonction paire : $f(x) = x^2$



Fonction impaire : $g(x) = x^3$



II] Résolution d'équations et d'inéquations :

1- Résolution graphique :

Propriété : Soit f définie sur D_f et a un réel.

- ↪ Résoudre graphiquement $f(x) = a$, c'est lire les abscisses des points de la courbe de f ayant une **ordonnée** égale à a .
 - On trace la droite horizontale d'équation $y = a$. Les solutions sont les abscisses de ses points d'intersection avec C_f .

- ↪ Résoudre graphiquement $f(x) \leq a$, c'est lire les abscisses des points de la courbe de f ayant une **ordonnée inférieure ou égale** à a .

Propriété : Soient f et g définies sur un même ensemble D .

- ↪ Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$, c'est lire les abscisses des **points d'intersection** des deux courbes.
- ↪ Résoudre graphiquement $f(x) \leq g(x)$, c'est lire les abscisses des points de la courbe de f situés **en-dessous** de celle de g .

Remarque : On peut aussi résoudre numériquement.

Exemple : Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x^2 - 3x + 3$. Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection des courbes de f et de g .

Les courbes se coupent lorsque les deux fonctions sont égales. On pose donc : $f(x) = g(x)$

Ce qui donne : $x^2 + 1 = 2x^2 - 3x + 3$.

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x^2 + 3x - 3 = 0.$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Pour avoir une équation plus agréable à factoriser, on multiplie les deux membres par -1 (ce qui ne change pas les solutions) : $x^2 - 3x + 2 = 0$

On factorise : $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

On résout l'équation produit nul.

L'équation devient : $(x - 1)(x - 2) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. On a donc :

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Conclusion : Les deux courbes se coupent en deux points. Leurs abscisses sont : $x = 1$ et $x = 2$.

Ainsi, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, donc les points d'intersection sont $(1 ; 2)$ et $(2 ; 5)$.

2- Signe d'une fonction :

Définition : Soit f définie sur D_f .

↪ On dit que f est **positive** sur $D \subset D_f$ si, pour tout $x \in D$, $f(x) \geq 0$.

↪ On dit que f est **négative** sur $D \subset D_f$ si, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq 0$.

Remarque : « Déterminer le signe de f », c'est trouver les ensembles où elle est positive, négative, et les valeurs où elle s'annule. On résume dans un **tableau de signes**.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 1)(x + 2)$.
Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de signes.

On cherche les valeurs qui annulent chaque facteur :

$$3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

On dresse le tableau de signes. Le coefficient de x dans $3x - 1$ est positif (+), dans $x + 2$ est positif (+). Le produit est donc positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Conclusion :

↪ $f(x) > 0$ sur $] -\infty ; -2[\cup] \frac{1}{3} ; +\infty[$.

↪ $f(x) < 0$ sur $] -2 ; \frac{1}{3}[$

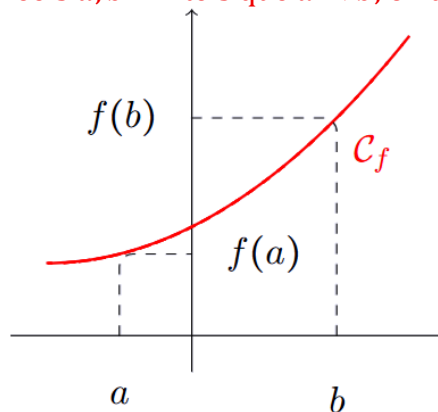
↪ $f(x) = 0$ pour $x = -2$ et $x = \frac{1}{3}$.

III] Variations de fonctions :

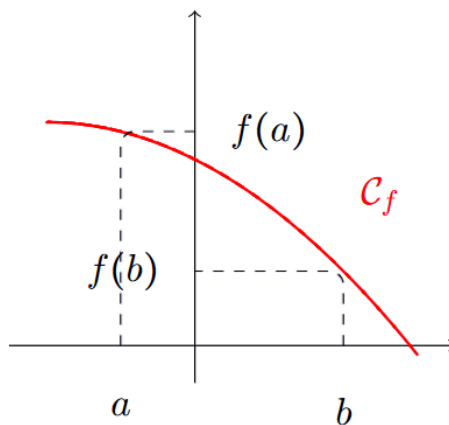
1- Définition :

Définition : Soit f définie sur D_f et $I \subset D_f$ un intervalle.

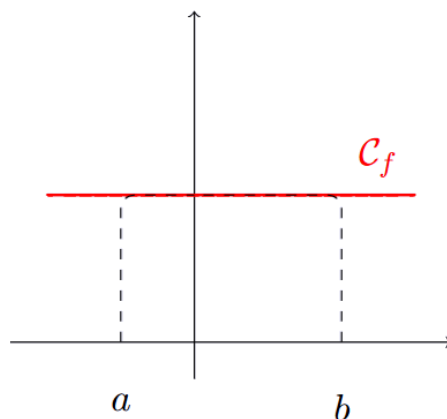
f est **croissante** sur I si, pour tous réels $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a : $f(a) \leq f(b)$.



f est décroissante sur I si, pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a : $f(a) \geq f(b)$.



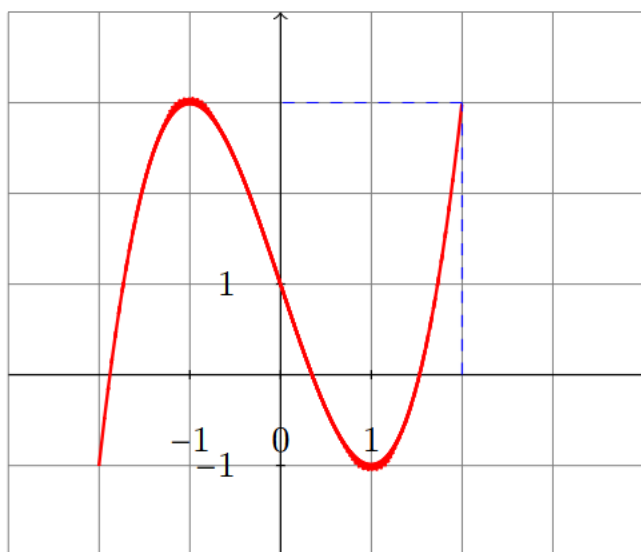
f est constante sur I si, pour tous $a, b \in I$, $f(a) = f(b)$.



Remarques :

- ⇒ On définit de même la stricte croissance/décroissance avec des inégalités strictes : $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$.
- ⇒ Une fonction n'est croissante ou décroissante **que sur un intervalle**.

Exemple :



Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 2]$ et représentée ci-contre.

Ici, f est strictement croissante sur $[-2 ; -1]$ et sur $[1 ; 2]$,

et strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$.

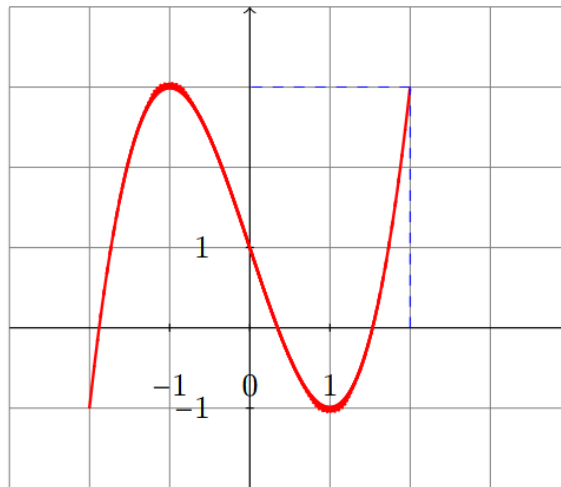
Définition : Une fonction est monotone sur un intervalle lorsqu'elle y est soit croissante, soit décroissante.

Exemple : La fonction ci-dessus n'est pas monotone sur $[-2 ; 2]$ car elle change en $x = -1$ et $x = 1$. En revanche, elle l'est sur $[-1 ; 1]$ par exemple.

2- Tableau de variations :

Définition : On résume les variations d'une fonction dans un **tableau de variations**.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 2]$ et représentée ci-dessous :



On peut alors dresser le tableau de variations de f ainsi :

x	-2	-1	1	2
f	-1	3	-1	3

Remarque : Lorsqu'une **fonction admet une valeur interdite**, on la symbolise avec une double barre $\parallel$ dans le tableau de variations.

3- Extremum d'une fonction sur un intervalle :

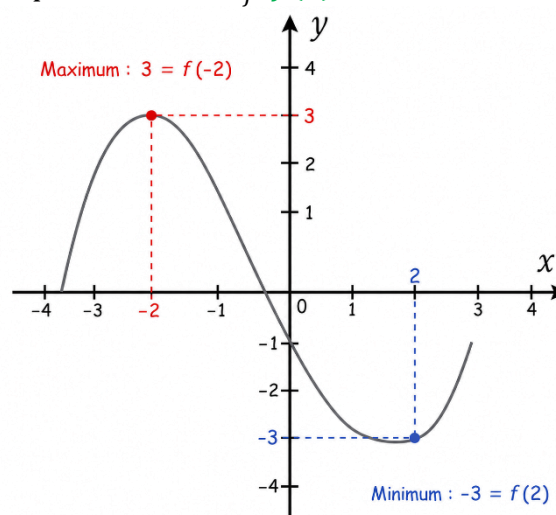
Définitions : Soit f définie sur D_f .

- ↪ On appelle **minimum** m de f sur D_f la plus petite image possible.
- ↪ On appelle **maximum** M de f sur D_f la plus grande image possible.

Remarques :

- ↪ Si **m est le minimum**, alors pour tout $x \in D_f$, **$f(x) \geq m$** .
- ↪ Si **M est le maximum**, alors pour tout $x \in D_f$, **$f(x) \leq M$** .

Exemple :



Remarque : Une fonction n'admet pas forcément de minimum ni de maximum sur son domaine, mais elle peut en admettre sur un intervalle inclus.

Définition : On appelle **extremum** de f un **minimum** ou un **maximum** de f .