

Vecteurs et repérage

Dans cette partie, on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On notera $\vec{i}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}$ le vecteur $\overrightarrow{OJ}$.

Le couple formé des deux vecteurs $(\vec{i} ; \vec{j})$ est appelé une base orthonormée.

I] Coordonnées d'un vecteur :

Propriété : Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, noté $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exemple : Avec $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 - 2 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 - (-1) \\ 3 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Propriété : Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, et k un réel.

$$-\vec{u} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad \left\| \quad \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad \right\| \quad k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \quad \left\| \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont égaux lorsque } x = x' \text{ et } y = y'. \right.$$

Exemple : Avec les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.

$$3\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 \\ 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 4\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \times (-1) \\ 4 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 9 - (-4) \\ 6 - 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -14 \end{pmatrix} \right.$$

II] Vecteurs colinéaires :

Définition : Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, le nombre défini par :

$$\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Propriété : Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ sont **colinéaires** si et seulement si $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = 0$

Exemple : Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 10 \times 2 - (-4) \times (-5) \\ = 20 - 20 \\ = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix} \\ \det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = 4 \times 23 - 9 \times 11 \\ = 92 - 99 \\ = -7 \neq 0$$

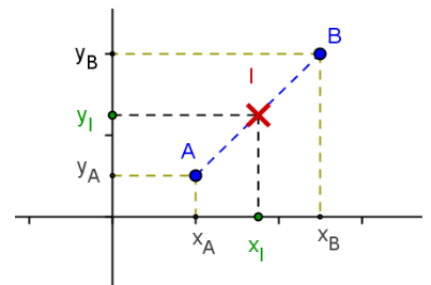
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

III] Coordonnées du milieu d'un segment :

Propriété : Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points du plan

Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $I \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

Démonstration : I est le milieu de $[AB]$ ssi $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$.



$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - x_A = x_B - x_I \\ y_I - y_A = y_B - y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_I = x_B + x_A \\ 2y_I = y_B + y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_a + x_b}{2} \\ y_I = \frac{y_a + y_b}{2} \end{cases}$$

IV] Distance dans un repère orthonormée :

Propriété : Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points du plan

La **distance de A à B**, est donnée par : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

AB désigne aussi la **longueur du segment $[AB]$** , et la **norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$** .

Démonstration : Cette propriété découle immédiatement du théorème de Pythagore.

Le triangle ABH est rectangle en H, donc

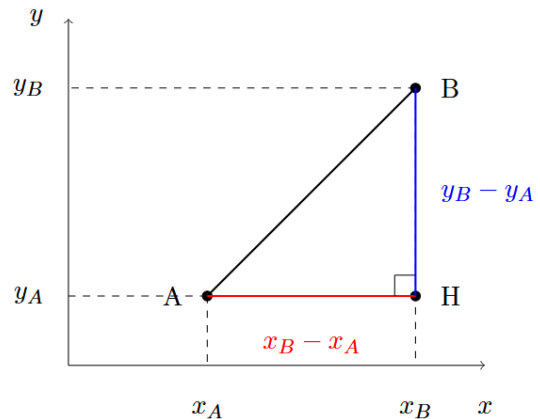
d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2.$$

En remplaçant par les coordonnées, on a

alors :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$



Exemple : Soit $A \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ deux points dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$AB = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-2 - 2)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$AB = \sqrt{9 + 16}$$

$$AB = \sqrt{25}$$

$$AB = 5$$