

Systèmes d'équations et droites

I] Système de deux équations à deux inconnues :

Définition : Un système de deux équations à deux inconnues x et y peut s'écrire sous la forme
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 où $a, b, c, a', b',$ et c' sont des nombres réels donnés.

Exemple : $\begin{cases} 2x + 7y = 11 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues x et y .

II] Résolution d'un système :

1- Définition :

Définition : Résoudre un système, c'est trouver tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient les deux équations à la fois.

2- Résoudre un système par la méthode par substitution :

Exemple : Résoudre le système d'équations suivants.

$$\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$$

Remarque : La méthode de substitution est à privilégier quand on peut facilement isoler une inconnue dans une des équations. C'est-à-dire lorsque le coefficient d'une inconnue est égal à 1 ou -1.

Isoler l'inconnue y dans la 1^{ère} équation.

Remplacer (substituer) y par $3x + 9$ dans la 2^{ème} équation.

Résoudre la 2^{ème} équation pour trouver la valeur de x .

Maintenant que la valeur de x est trouvée, **remplacer** x par -2 dans la 1^{ère} équation pour trouver y .

$$\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 9 \\ 4x - 3(3x + 9) = -17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 9 \\ 4x - 9x - 27 = -17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 9 \\ -5x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 9 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \times (-2) + 9 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ne pas oublier les parenthèses

Le système admet un couple de solutions noté : $S = \{-2 ; 3\}$

On peut vérifier l'exactitude des résultats, en remplaçant x et y par leurs valeurs dans les équations pour voir que l'on obtient les bons résultats.

$$-3 \times (-2) + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$4 \times (-2) - 3 \times 3 = -8 - 9 = -17$$

2- Résoudre un système par la méthode par combinaisons linéaires :

Exemple : Résoudre le système d'équations suivants.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

Remarque : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système. En effet, en isolant une inconnue, on ramène les équations à des coefficients rationnels, ce qui complique considérablement les calculs.

Multiplier chaque membre de la première équation par un même nombre et chaque membre de la seconde équation par un même nombre de sorte que le coefficient de l'une des inconnues soit le même dans les deux équations.

Soustraire membres à membres les deux égalités, une inconnue est alors simplifiée.

On obtient une seule équation à une seule inconnue.

Résoudre l'équation.

On connaît ainsi la valeur d'une des deux inconnues.

Trouver la valeur de l'autre inconnue.

Remplacer la valeur trouvée dans l'une des équations.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \times 5 \\ \times 3 \end{array} \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x - 10y = 25 \\ 15x + 9y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 15x - 10y = 25 \\ - \quad 15x + 9y = 6 \\ \hline 15x - 15x - 10y - 9y = 25 - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -19y = 19 \\ y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2 \times (-1) = 5 \\ 3x + 2 = 5 \\ 3x = 5 - 2 \\ 3x = 3 \\ x = 1 \end{array}$$

$$S = \{(1 ; -1)\}$$

Remarque : Dans certains cas, il n'est pas nécessaire de multiplier les deux équations, mais une seule, afin d'obtenir les mêmes coefficients devant une inconnue.

II] Lien entre les droites et les systèmes :

Propriété : Soient les droites d d'équation $ax + by + c = 0$ et d' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$, avec a, b, c, a', b' et c' des réels.

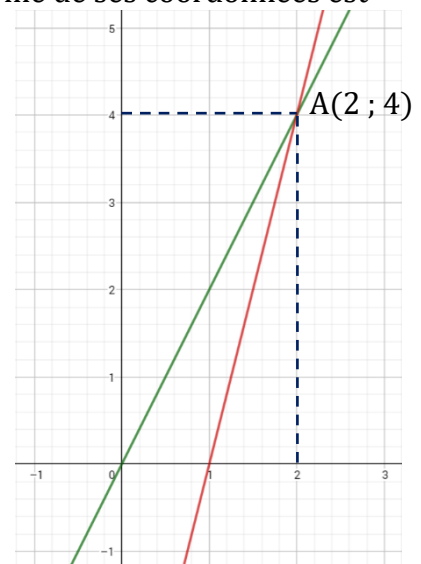
Soit S le système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

Un point M appartient à d et à d' si et seulement si le couple (x ; y) formé de ses coordonnées est solution du système S.

Exemple : On considère le système : $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$

La solution de ce système est le couple (2 ; 4) donc le point A(2 ; 4) appartient à la droite d d'équation $-2x + y = 0$ et à la droite d' d'équation $4x - y = 4$.

Il s'agit de leur (unique) point d'intersection.



Propriétés :

⇒ Si d et d' sont sécantes, alors elles ont un unique point d'intersection : le système S admet une unique solution, le couple formé par les coordonnées du point d'intersection.

⇒ Si d et d' sont strictement parallèles, alors elles n'ont aucun point d'intersection : le système S n'admet aucune solution.

⇒ Si d et d' sont confondues, alors elles ont une infinité de points en commun : le système S admet une infinité de solutions.