

Equations / Inéquations

I] Equations :

1 - Définition et vocabulaire :

Définitions :

↪ Une **équation** est une **égalité** dans laquelle figurent une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres.

↪ Une **solution** d'une équation **d'inconnue x** est une valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie.

↪ **Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation** à une inconnue consiste à **déterminer, si elles existent, toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$ de l'inconnue vérifiant l'égalité proposée**. Ces valeurs constituent l'ensemble des solutions de l'équation.

2 - Équation du premier degré :

Définition : Une **équation du premier degré** à une inconnue x est une équation pouvant se ramener à la forme **$ax + b = 0$** , avec a et b des réels, et $a \neq 0$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x + 7 = x - 1$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, 3x + 7 = x - 1 &\Leftrightarrow 3x - x = -1 - 7 \\ &\Leftrightarrow 2x = -8 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-8}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -4\end{aligned}$$

Donc la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $3x + 7 = x - 1$ est -4 .

3 - Équation produit nul :

Propriété : Soient a et b des réels. Alors :

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(3x + 4)(x - 2) = 0$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, (3x + 4)(x - 2) = 0 &\Leftrightarrow 3x + 4 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x = -4 \text{ ou } x = 2 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \text{ ou } x = 2\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(3x + 4)(x - 2) = 0$ sont $-\frac{4}{3}$ et 2 .

4 - Équation quotient nul :

Propriété : Soient a et b des réels. Alors :

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b \neq 0$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{2x-3}{x+1} = 0$.

Étape n°1 : Détermination de la valeur interdite.

Le dénominateur ne doit pas s'annuler : $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Ainsi, -1 est la valeur interdite.

Étape n°2 : Résolution de l'équation.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2x-3}{x+1} = 0 &\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

La valeur $\frac{3}{2}$ n'est pas la valeur interdite, donc elle est acceptable.

Conclusion : L'équation $\frac{2x-3}{x+1} = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} : \frac{3}{2}$.

5 - Équations de la forme $x^2 = a$:

Propriété : Soit a un réel.

↪ Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet exactement **deux solutions** dans $\mathbb{R} : \sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

↪ Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet une **unique solution** dans $\mathbb{R} : 0$.

↪ Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet **aucune solution dans $\mathbb{R}$** .

Démonstration :

$$\begin{aligned}\text{↪ Cas où } a > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 = a &\Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{a})^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{a} \text{ ou } x = \sqrt{a}\end{aligned}$$

$$\text{↪ Cas où } a = 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 = a \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$$

$$\text{↪ Cas où } a < 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \text{ donc l'équation } x^2 = a \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{R}.$$

Exemples :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 25$.

L'équation $x^2 = 25$ possède deux solutions : $x = -\sqrt{25} = -5$ et $x = \sqrt{25} = 5$

On note : $S = \{-5 ; 5\}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = -9$.

L'équation $x^2 = -9$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car -9 est négatif.

On note : $S = \emptyset$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x - 1)^2 = 4$.

L'équation $(x - 1)^2 = 4$ possède deux solutions : $x - 1 = -\sqrt{4}$ et $x - 1 = \sqrt{4}$

Soit : $x = -2 + 1 = -1$ et $x = 2 + 1 = 3$.

L'équation a deux solutions : -1 et 3 . On note : $S = \{-1 ; 3\}$.

II] Inéquations :

1 - Inégalités et propriétés :

Définition : Une **inégalité** est une affirmation fondée sur l'un des signes suivants : $< ; \leq ; > ; \geq$.

Propriété : On peut **ajouter** ou **retrancher** un même réel aux deux membres d'une inégalité, en **conservant son sens**.

Autrement dit, pour tous réels a, b et c :

$$a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$$

$$a \leq b \Leftrightarrow a - c \leq b - c$$

Exemples : $3 \geq -2 \Leftrightarrow 5 + 6 \geq -1 + 4 \Leftrightarrow 11 \geq 3$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3x + 4 \leq 5 \Leftrightarrow 3x + 4 - 5 \leq 5 - 5 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 0$$

Propriété : On peut **multiplier** ou **diviser** les deux membres d'une inégalité par un même nombre **strictement positif**, en **conservant le sens de l'inégalité**.

Autrement dit, pour tous réels a, b et c , avec $c > 0$, on a :

$$a \leq b \Leftrightarrow a \times c \leq b \times c$$

$$a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

Propriété : On peut **multiplier** ou **diviser** les deux membres d'une inégalité par un même nombre **strictement négatif**, en **changeant le sens de l'inégalité**.

Autrement dit, pour tous réels a, b et c , avec $c < 0$, on a :

$$a \leq b \Leftrightarrow a \times c \geq b \times c$$

$$a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$

Exemples :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{3} \geq \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{7}x < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7}x \times 7 < 3 \times 7$$

$$\Leftrightarrow x < 21$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -5x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} \geq \frac{2}{-5}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{2}{5}$$

2 - Définition et vocabulaire :

Définitions :

↪ Une **inéquation** est une **inégalité** dans laquelle figurent une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres.

↪ Une **solution** d'une inéquation d'inconnue x est une **valeur de x** pour laquelle l'inégalité est **vraie**.

↪ **Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation**, c'est **déterminer toutes ses solutions réelles**.

Exemple : $8x + 2 \geq 7$ est une inéquation d'inconnue x .

Résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}$, c'est trouver toutes les valeurs réelles de x telles que $8x + 2 \geq 7$.

3 - Résoudre une inéquation du 1^{er} degré à une inconnue :

Méthodologie : Pour résoudre une inéquation, on utilise les mêmes techniques que pour résoudre une équation.

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$3x - 5 \geq x + 3$$

On regroupe les termes en x d'un côté et les constantes de l'autre :

$$3x - x \geq 3 + 5$$

$$2x \geq 8$$

On divise les deux membres par 2

(nombre strictement positif, donc le sens de l'inégalité reste le même) :

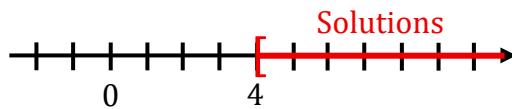
$$\frac{2x}{2} \geq \frac{8}{2}$$

$$x \geq 4$$

Conclusion :

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est l'intervalle $[4 ; +\infty[$.

On note : $S = [4 ; +\infty[$



Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$2x + 7 < 5x - 2$$

On regroupe les termes en x d'un côté et les constantes de l'autre :

$$2x - 5x < -2 - 7$$

$$-3x < -9$$

On divise les deux membres par -3

(nombre strictement négatif, donc le sens de l'inégalité change) :

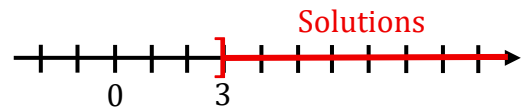
$$\frac{-3x}{-3} > \frac{-9}{-3}$$

$$x > 3$$

Conclusion :

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]3 ; +\infty[$.

On note : $S =]3 ; +\infty[$



4 - Résoudre une inéquation produit :

Rappels :

↪ Le **produit** de deux nombres réels non nuls et de même signe est positif.

↪ Le **produit** de deux nombres réels non nuls et de signes contraires est négatif.

Propriétés : Soient a, b, c et d des réels avec a et c différents de 0.

Pour résoudre une inéquation du type $(ax + b)(cx + d) \leq 0$, on peut utiliser un **tableau de signes**.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x - 4)(2x + 6) \geq 0$.

↪ Le signe de $(x - 4)(2x + 6)$ dépend du signe de chaque facteur $(x - 4)$ et $(2x + 6)$.

Étape n°1 : Déterminer les valeurs qui annulent chaque facteur.

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$2x + 6 = 0$$

$$2x = -6$$

$$x = -3$$

Étape n°2 : Dresser le tableau de signes en utilisant la propriété vue au-dessus sur le signe d'un produit de facteurs.

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x - 4$		$-$	$\emptyset$	$+$
$2x + 6$	$-$	$\emptyset$	$+$	
$(x - 4)(2x + 6)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$+$

Étape n°3 : Résoudre l'inéquation $(x - 4)(2x + 6) \geq 0$.

On cherche les valeurs de x pour lesquelles le produit est positif ou nul.

D'après le tableau : $(x - 4)(2x + 6) \geq 0 \Leftrightarrow x \in] - \infty, -3] \cup [4, +\infty[$

Conclusion : L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est : $S =] - \infty, -3] \cup [4, +\infty[$.

5 – Résoudre une inéquation quotient :

Rappels :

↪ Le **quotient** de **deux nombres réels non nuls et de même signe** est **positif**.

↪ Le **quotient** de **deux nombres réels non nuls et de signes contraires** est **négatif**.

Propriétés : Soient a, b, c et d des réels avec a et c différents de 0.

Pour résoudre une inéquation du type $\frac{ax + b}{cx + d} \leq 0$, on peut utiliser un **tableau de signes**.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x + 3}{2x - 4} < 0$.

↪ Le signe de $\frac{x + 3}{2x - 4}$ dépend du signe des expressions $(x + 3)$ et $(2x - 4)$.

Étape n°1 : Déterminer la valeur interdite (annulation du dénominateur) et les valeurs annulant le numérateur.

$2x - 4 \neq 0$		$x + 3 = 0$
$2x \neq 4$		$x = -3$
$x \neq 2$		
2 est une valeur interdite		

Étape n°2 : Dresser le tableau de signes en utilisant la propriété vue au-dessus sur le signe d'un produit de facteurs.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x + 3$	$-$	$\emptyset$	$+$	
$2x - 4$		$-$	$\emptyset$	$+$
$\frac{x + 3}{2x - 4}$	$+$	$\emptyset$	$-$	$+$

Étape n°3 : Résoudre l'inéquation $\frac{x + 3}{2x - 4} < 0$.

On cherche les valeurs de x pour lesquelles le quotient est strictement négatif.

D'après le tableau : $\frac{x + 3}{2x - 4} < 0 \Leftrightarrow x \in] - 3 ; 2[$

(les bornes -3 et 2 sont exclues car en -3 le quotient est nul et en 2 il n'est pas défini).

Conclusion : L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est : $S =] - 3, 2[$

La double barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x = 2$.