

Calcul littéral

I] Expression littérale :

Définition : Une **expression littérale** est une expression mathématique dans laquelle une (ou plusieurs) valeur(s) est (sont) remplacé(es) par une (ou plusieurs) lettre(s).

Exemples : $3x + 5$; $(2x + 1)^2$; $2y - 7$; $a + b + c$; πr^2 .

II] Développements et factorisations :

Définitions : **Développer** c'est transformer un produit en une somme (ou différence) de termes.

Factoriser c'est transformer une somme en un produit de facteurs.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Développement}} \\ k(a \pm b) = ka \pm kb \\ (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \\ \xleftarrow{\text{Factorisation}} \end{array}$$

Exemples de développements :

$$A = 2(3x - 5)$$

$$A = 2 \times 3x + 2 \times (-5)$$

$$A = 6x - 10$$

$$B = (2x - 1)(-x + 4)$$

$$B = 2x \times (-x) + 2x \times 4 + (-1) \times (-x) + (-1) \times 4$$

$$B = -2x^2 + 8x + x - 4$$

$$B = -2x^2 + 9x - 4$$

Exemples de factorisations :

$$A = 3x + 15$$

$$A = 3 \times x + 3 \times 5$$

$$A = 3(x + 5)$$

$$B = 7x^2 - xy$$

$$B = x \times 7x - x \times y$$

$$B = x(7x - y)$$

$$C = (x + 4)(x + 3) - (x + 3)(7 - x)$$

$$C = (x + 3)(x + 4) - (x + 3)(7 - x)$$

$$C = (x + 3)[(x + 4) - (7 - x)]$$

$$C = (x + 3)(x + 4 - 7 + x)$$

$$C = (x + 3)(2x - 3)$$

III] Identités remarquables :

Propriété : Pour tous nombres réels a et b on a,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad | \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad || \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Exemples de développements :

$$A = (2x + 3)^2$$

$$A = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$$

$$A = 4x^2 + 12x + 9$$

$$B = (3x - 2)^2$$

$$B = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2$$

$$B = 9x^2 - 12x + 4$$

$$C = (5x + 1)(5x - 1)$$

$$C = (5x)^2 - 1^2$$

$$C = 25x^2 - 1$$

Exemples de factorisations :

$$A = x^2 + 6x + 9$$

$$A = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$

$$A = (x + 3)^2$$

$$B = 4x^2 - 20x + 25$$

$$B = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2$$

$$B = (2x - 5)^2$$

$$C = 9x^2 - 16$$

$$C = (3x)^2 - 4^2$$

$$C = (3x + 4)(3x - 4)$$

IV] Calcul littéral fractionnaire:

1 - Les valeurs interdites :

Lorsqu'un quotient intervient avec du calcul littéral, il faut toujours vérifier s'il n'y a pas un problème d'existence. On appelle cela la recherche des valeurs interdites.

Définition : Une **valeur interdite** est un **nombre réel qui annule une expression au dénominateur**

Exemple : Soit l'expression $H(x) = \frac{5x - 3}{4x + 8}$

La fonction H existe si et seulement si son dénominateur n'est pas nul :

$$4x + 8 \neq 0$$

On résout l'équation :

$$4x + 8 = 0$$

$$4x = -8$$

$$x = -2$$

Ainsi, la condition d'existence est $x \neq -2$.

On dit que **-2** est la **valeur interdite** pour l'expression H.

On note le domaine d'existence : $D_H = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2 - Réduire au même dénominateur :

Méthodologie : Pour **additionner ou soustraire des fractions algébriques**, **il est nécessaire de les réduire au même dénominateur**. Cela permet de les transformer en une seule fraction, dont on peut ensuite additionner ou soustraire les numérateurs.

Propriété : Pour tout nombre réel a, b, c et d avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Exemple : Réduire les expressions suivantes au même dénominateur :

$$\begin{aligned} A &= \frac{7x}{x-2} - \frac{5}{3-x} \\ A &= \frac{7x(3-x)}{(x-2)(3-x)} - \frac{5(x-2)}{(3-x)(x-2)} \\ A &= \frac{7x(3-x) - 5(x-2)}{(x-2)(3-x)} \\ A &= \frac{21x - 7x^2 - 5x + 10}{(x-2)(3-x)} \\ A &= \frac{-7x^2 + 16x + 10}{(x-2)(3-x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 3 + \frac{5x}{2x+1} \\ B &= \frac{3}{1} + \frac{5x}{2x+1} \\ B &= \frac{3(2x+1)}{1 \times (2x+1)} + \frac{5x \times 1}{(2x+1) \times 1} \\ B &= \frac{3(2x+1) + 5x}{2x+1} \\ B &= \frac{6x + 3 + 5x}{2x+1} \\ B &= \frac{11x + 3}{2x+1} \end{aligned}$$