

Les vecteurs

I] Vecteurs du plan :

1- Définitions :

Définition : Soient A et B deux points distincts du plan. La **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** est la transformation du plan qui transforme le point A en B.



Définition : Soient A et B deux points distincts du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- ↪ sa **norme** : la **longueur AB**;
- ↪ sa **direction** : l'inclinaison de la droite (AB);
- ↪ son **sens** : de A vers B.

Le point A est appelé **l'origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le point B est appelé son **extrémité**.

Définition : La **longueur d'un vecteur** est appelée la **norme** du vecteur.

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\| \overrightarrow{AB} \|$ (et on a $\| \overrightarrow{AB} \| = AB$).

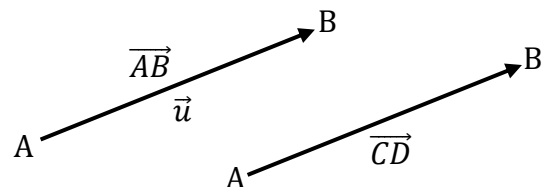
Définition : Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé le **vecteur nul** et se réduit au point A. On le note $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Le **vecteur nul n'a pas de direction, pas de sens, et a pour norme 0**.

2- Vecteurs égaux :

Définition : Deux **vecteurs sont égaux** lorsqu'ils ont la **même direction, le même sens et la même longueur**.

Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

On note : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



On dit dans ce cas que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants d'un même vecteur.

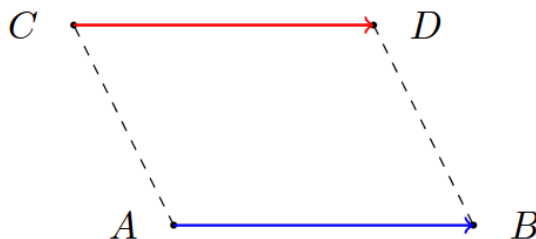
On peut noter plus simplement ce vecteur à l'aide d'une seule lettre : $\vec{u}$.

Et on a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

3- Propriétés :

Propriété : Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.

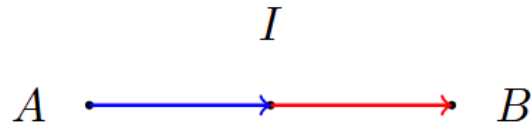


Démonstration :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AB = CD$ et $(AB) \parallel (CD)$ et le sens de A vers B est le même que celui de C vers D.
 $\Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.

Propriété : Soient A, B et I trois points du plan. Alors :

$$I \text{ est le milieu du segment } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$



Démonstration : I est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow I \in [AB]$ et $IA = IB$.

$\Leftrightarrow$ Les points A, I et B sont alignés dans cet ordre et $IA = IB$.

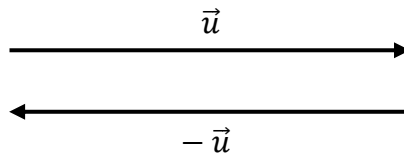
$\Leftrightarrow$ Les droites (AI) et (IB) sont parallèles, le sens de A vers I est celui de I vers B et $IA = IB$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

4- Vecteurs opposés :

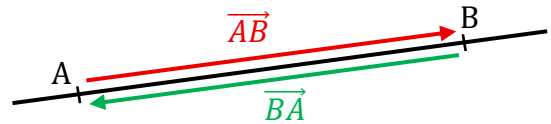
Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$ tel que $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont de même direction, de même norme, mais de sens contraire.



Remarques : On a alors $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

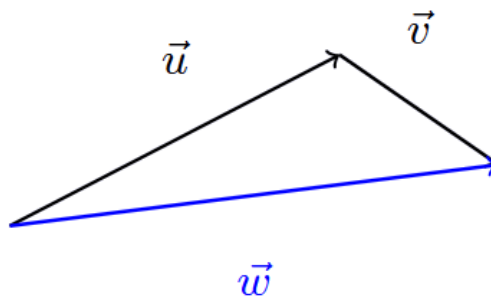
On a alors, pour deux points A et B du plan, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



II] Somme de vecteurs :

Définition : La translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{w}$ défini par :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$



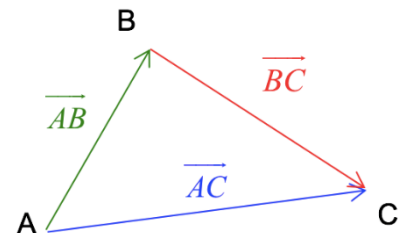
L'enchaînement de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteurs noté $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Propriété : Pour tous points A, B et C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette égalité est appelée la **relation de Chasles**.

La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ construit **bout à bout** est égale au vecteur $\overrightarrow{AC}$.



Démonstration : La translation qui transforme A en B suivie de la translation qui transforme B en C est donc la translation qui transforme A en C, et on a donc bien

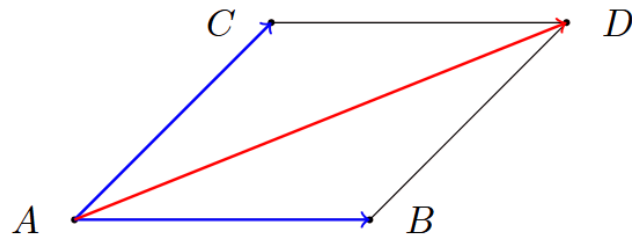
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Remarques : Dans le triangle ABC, on a également les relations : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Propriété caractéristique du parallélogramme :

Soient A, B, C et D quatre points du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

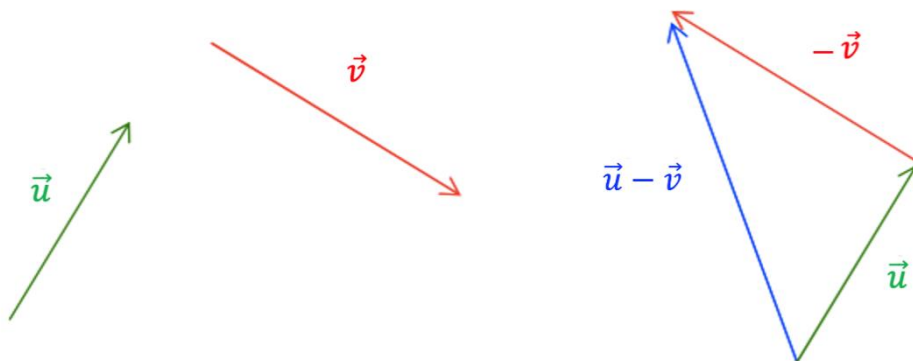


Démonstration : Si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, alors, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, soit encore $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Donc ABDC est un parallélogramme.

Réciproquement, si ABDC est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, soit encore $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles.

III] Soustraction de deux vecteurs :

Pour effectuer la différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on passe à la somme : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.
 Pour obtenir la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$, on construit les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$ bout à bout.



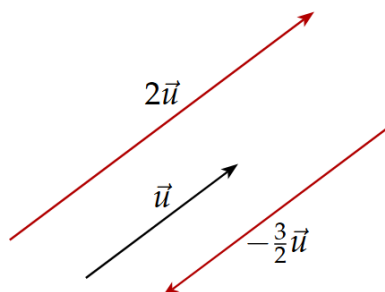
IV] Multiplication d'un vecteur par un réel :

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et k un réel non nul.

On appelle **produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k** le vecteur noté $k\vec{u}$:

- ↪ Si $k > 0$, $k\vec{u}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$ et sa longueur est multipliée par k :
 $||k\vec{u}|| = k ||\vec{u}||$
- ↪ Si $k < 0$, $k\vec{u}$ a même direction et de sens contraire à $\vec{u}$ et sa longueur est multipliée par $(-k)$:
 $||k\vec{u}|| = -k ||\vec{u}||$
- ↪ Si $k = 0$: $0\vec{u} = \vec{0}$

Remarque : Si $k > 0$, le coefficient k ne joue que sur la longueur et si $k < 0$, le coefficient k joue sur la longueur et le sens.



Propriétés : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, et soient k et k' deux réels. Alors :

- $\Rightarrow k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $\Rightarrow (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $\Rightarrow k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

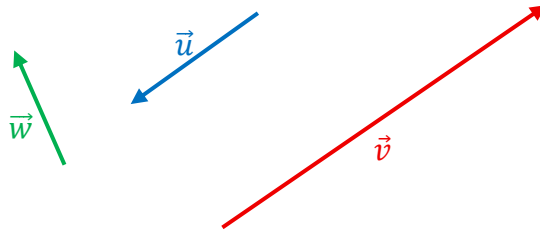
V] Colinéarité de deux vecteurs

1- Définition :

Attention : On ne dit pas que deux vecteurs sont parallèles mais colinéaires car ils n'ont pas de point d'application.

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, mais ne sont pas colinéaires à $\vec{w}$.

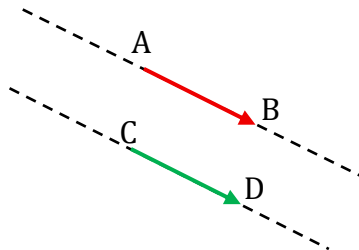
Remarques :

- $\Rightarrow$ Le **vecteur nul** est **colinéaire à tout vecteur du plan**.
- $\Rightarrow$ Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si, et seulement si, ils ont la **même direction**.

2- Lien avec le parallélisme et l'alignement :

Propriété : Soient A, B, C et D quatre points du plan.

Les droites **(AB) et (CD) sont parallèles** si et seulement si les **vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires**.



Propriété : Soient A, B et C trois points du plan.

Les points **A, B et C sont alignés** si et seulement si les vecteurs **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires**.

Remarque : A, B, C sont alignés revient en effet à dire que les droites (AB) et (AC) sont confondues (donc parallèles).

