

## Fractions, puissances et racines carrées

### I] Fractions :

**Propriétés :** Soient  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels, avec  $b \neq 0$  et  $d \neq 0$ .

↪ Addition et soustraction de fractions de même dénominateur :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

↪ Multiplication de fractions :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

**Propriétés :** Soient  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels, avec  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $d \neq 0$ .

↪ Division de fractions :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

**Exemples :**

|                                                    |                                                                     |                                            |                                        |                                                     |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $A = \frac{5}{4} + \frac{7}{16}$                   | $B = \frac{5}{3} - \frac{6}{5}$                                     | $C = \frac{2}{-3} \times \frac{-5}{11}$    | $D = \frac{3}{4} \div \frac{-5}{8}$    | $E = \frac{8}{7} - \frac{4}{7} \times \frac{5}{3}$  |
| $A = \frac{5 \times 4}{4 \times 4} + \frac{7}{16}$ | $B = \frac{5 \times 5}{3 \times 5} - \frac{6 \times 3}{5 \times 3}$ | $C = \frac{2 \times (-5)}{(-3) \times 11}$ | $D = \frac{3}{4} \times \frac{8}{-5}$  | $E = \frac{8}{7} - \frac{20}{21}$                   |
| $A = \frac{20}{16} + \frac{7}{16}$                 | $B = \frac{25}{15} - \frac{18}{15}$                                 | $C = \frac{-10}{-33}$                      | $D = \frac{3 \times 8}{4 \times (-5)}$ | $E = \frac{8 \times 3}{7 \times 3} - \frac{20}{21}$ |
| $A = \frac{27}{8}$                                 | $B = \frac{7}{15}$                                                  | $C = \frac{10}{33}$                        | $D = \frac{24}{-20}$                   | $E = \frac{24}{21} - \frac{20}{21}$                 |
|                                                    |                                                                     |                                            | $D = -\frac{24 \div 4}{20 \div 4}$     | $E = \frac{4}{21}$                                  |
|                                                    |                                                                     |                                            | $D = -\frac{6}{5}$                     |                                                     |

### II] Puissance d'un nombre :

#### 1 - Exposant positif :

**Définition :** Soit  $a$  un nombre relatif et  $n$  un nombre entier positif.

La puissance  $a^n$ , qui se lit «  $a$  exposant  $n$  », désigne le produit de  $n$  facteurs égaux à  $a$  :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois le facteur } a}$$

Le nombre  $a$  est appelé la **base** et le nombre  $n$  est appelé **l'exposant**.

**Exemples :**  $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$ .

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8.$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

**Attention :** L'exposant porte sur toute la base placée entre parenthèses.

Ainsi :  $(-7)^4 = (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) = 2401$

En revanche :  $-7^4 = -(7^4) = -2401$

Donc :  $(-7)^4 \neq -7^4$

## 2- Exposant nul :

**Propriété :** Pour tout nombre réel  $a$  non nul :  $a^0 = 1$

**Exemples :**  $5^0 = 1$ ,  $(-3)^0 = 1$ ,  $\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$ .

## 3- Exposant négatif :

**Propriété :** Pour tout nombre réel  $a \neq 0$  et tout entier naturel non nul  $n$  :  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

En particulier :  $a^{-1} = \frac{1}{a}$

**Exemples :**  $3^{-1} = \frac{1}{3}$   
 $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$   
 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$

## 4 - Opérations sur les puissances :

**Propriété :** Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels non nuls, et  $n$  et  $p$  des entiers relatifs.

| $a^n \times a^p = a^{n+p}$                            | $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$                            | $(a^n)^p = a^{n \times p}$                            | $(a \times b)^n = a^n \times b^n$                          | $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$            |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $A = 8^5 \times 8^7$<br>$A = 8^{5+7}$<br>$A = 8^{12}$ | $B = \frac{7^4}{7^6}$<br>$B = 7^{4-6}$<br>$B = 7^{-2}$ | $C = (7^2)^6$<br>$C = 7^{2 \times 6}$<br>$C = 7^{12}$ | $D = 3^7 \times 9^7$<br>$D = (3 \times 9)^7$<br>$D = 27^7$ | $F = \frac{1}{4^2}$<br>$F = 4^{-2}$ |

## III] Racine carrée :

### 1 - Définition :

**Définition :** Pour tout nombre réel  $a \geq 0$ , la **racine carrée de  $a$** , notée  $\sqrt{a}$ , est l'unique nombre réel positif ou nul dont le carré est égal à  $a$ .

**Exemples :**  $\sqrt{49} = 7$  donc  $7^2 = 49$

**Remarque :** L'écriture  $\sqrt{-7}$  n'a pas de sens dans l'ensemble des nombres réels.

En effet, il n'existe aucun nombre réel  $x$  tel que  $x^2 = -7$ , car le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul. Par conséquent, on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif dans l'ensemble des réels.

### Carrés parfaits usuels :

$\sqrt{0} = 0$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{121} = 11$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{144} = 12$

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{169} = 13$

$\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{196} = 14$

### 2 - Propriétés sur les racines carrées :

**Propriétés :** Pour un nombre  $a$  positif, on a  $\sqrt{a^2} = a$   
Pour un nombre  $a$  négatif, on a  $\sqrt{a^2} = -a$  }  $\sqrt{a^2} = |a|$

**Exemples :**  $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 = |3|$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$$

### 3 - Opérations sur les racines carrées :

#### a. Formules :

**Propriétés :**

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

**Exemples :**

$$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$$

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$$

$$(\sqrt{25})^2 = 5^2 = 25$$

**Démonstration :**  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$$

$$(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b \quad \text{car } a \text{ et } b \text{ sont positifs}$$

$$\text{Donc : } (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a \times b})^2$$

**On en déduit que :**  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$



**Attention :**  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

$$\text{Exemples : } \left. \begin{array}{l} \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \\ \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \end{array} \right\} \sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{36} - \sqrt{9} = 6 - 3 = 3 \\ \sqrt{36-9} = \sqrt{25} = 5 \end{array} \right\} \sqrt{36} - \sqrt{9} \neq \sqrt{36-9}$$

**Démonstration :**  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a+b})^2 = a + b$$

$$\text{Donc : } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2 \text{ car } 2\sqrt{ab} > 0$$

**On en déduit que :**  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

### b. Extraire un carré parfait :

**Exemples :** Écrire sous la forme  $a\sqrt{b}$ , avec  $a$  et  $b$  deux entiers et  $b$  étant le plus petit possible.

| <b>Méthodologie :</b>                              | $A = \sqrt{98}$                 | $B = \sqrt{45}$                | $C = 2\sqrt{125}$                                    |
|----------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|------------------------------------------------------|
| Faire apparaître le carré parfait.                 | $A = \sqrt{49 \times 2}$        | $B = \sqrt{9 \times 5}$        | $C = 2\sqrt{25 \times 5}$                            |
| Utiliser la formule $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ | $A = \sqrt{49} \times \sqrt{2}$ | $B = \sqrt{9} \times \sqrt{5}$ | $C = 2\sqrt{25} \times \sqrt{5}$                     |
| Calculer la racine carrée du carré parfait.        | $A = 7\sqrt{2}$                 | $B = 3\sqrt{5}$                | $C = 2 \times 5 \times \sqrt{5}$<br>$C = 10\sqrt{5}$ |

### c. Simplifier les écritures contenant des racines carrées :

**Méthodologie :** Pour simplifier des expressions contenant des racines carrées, on peut regrouper les termes ayant la même racine carrée.

Les différentes racines carrées sont :  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$

**Exemples :** Simplifier une écriture contenant des racines carrées.

$$A = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$$

On regroupe les termes en  $\sqrt{3}$  :

$$A = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$$

$$A = (5 - 2 + 7)\sqrt{3}$$

$$A = 10\sqrt{3}$$

$$B = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

On regroupe les termes en  $\sqrt{2}$   
et les termes en  $\sqrt{5}$  :

$$B = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

$$B = (6 + 3)\sqrt{2} + (-4 + 2)\sqrt{5}$$

$$B = 9\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$$

$$C = (4 + 5\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2})$$

On distribue le signe moins :

$$C = 4 + 5\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2}$$

On regroupe les termes sans  
racine et les termes en  $\sqrt{2}$  :

$$C = (4 - 3) + (5 + 2)\sqrt{2}$$

$$C = 1 + 7\sqrt{2}$$

**Exemple :** Écrire  $D = \sqrt{20} + 2\sqrt{45} - 3\sqrt{5}$  sous la forme  $a\sqrt{b}$  avec  $b$  le plus petit possible.

$D = \sqrt{20} + 2\sqrt{45} - 3\sqrt{5} \longrightarrow$  Faire apparaître les racines carrées d'une même famille.  $\sqrt{20}$  et  $\sqrt{45}$  peuvent se décomposer avec la  $\sqrt{5}$ .

$$D = \sqrt{4 \times 5} + 2\sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{5}$$

$$D = 2\sqrt{5} + 2 \times 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$$

$$D = 2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$$

$$D = (2 + 6 - 3)\sqrt{5}$$

$$D = 5\sqrt{5}$$

### d. Racines carrées et développements :

**Méthodologie :** Pour développer des expressions contenant des racines carrées, on applique les mêmes règles que pour le développement algébrique classique : les identités remarquables et la distributivité.

**Exemples :** Développer les expressions suivantes.

$$A = (\sqrt{5} + 1)(3 - 2\sqrt{5})$$

On applique la double distributivité

$$A = (\sqrt{5} \times 3) + (\sqrt{5} \times (-2\sqrt{5})) + (1 \times 3) + (1 \times (-2\sqrt{5}))$$

$$A = 3\sqrt{5} - 2 \times (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) + 3 - 2\sqrt{5}$$

$$A = 3\sqrt{5} - 2 \times 5 + 3 - 2\sqrt{5}$$

$$A = (3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}) + (-10 + 3)$$

$$A = \sqrt{5} - 7$$

$$B = (2 + \sqrt{7})^2$$

$$B = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2$$

$$B = 4 + 4\sqrt{7} + 7$$

$$B = 11 + 4\sqrt{7}$$

On applique la 1<sup>ère</sup> identité remarquable :  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$C = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$$

$$C = (\sqrt{6})^2 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$C = 6 - 2\sqrt{12} + 2$$

$$C = 8 - 2\sqrt{4 \times 3}$$

$$C = 8 - 2 \times (2\sqrt{3})$$

$$C = 8 - 4\sqrt{3}$$

On applique la 2<sup>ème</sup> identité remarquable :  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$D = (5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})$$

$$D = 5^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$D = 25 - 3$$

$$D = 22$$

On applique la 3<sup>ème</sup> identité remarquable :  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

#### e. Simplifier les fractions avec racines carrées au dénominateur :

**Propriété :** Dans une fraction, lorsque le dénominateur ne contient qu'une racine, on multiplie numérateur et dénominateur par cette racine.

**Exemples :**

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \quad \left| \quad \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

**Propriété :** Dans une fraction, lorsque le dénominateur est la somme d'un entier et d'une racine, on multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée.

La quantité conjuguée de  $(a + \sqrt{b})$  est  $(a - \sqrt{b})$  et réciproquement.

**Remarque :** Le produit des deux quantités donne une différence de deux carrés :

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b^2$$

**Exemples :**

$$\frac{5}{2 + \sqrt{3}} = \frac{5(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{5(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = \frac{10 - 5\sqrt{3}}{1} = 10 - 5\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{10}}{9 - 2} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{10}}{7}$$