

Fonctions de référence

I] La fonction carré :

1- Définition et propriété :

Définition : La **fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriété : La fonction carré est **paire** sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout réel x , $(-x)^2 = x^2$.

Démonstration : $\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^2 = (-1)^2 \times x^2 = 1 \times x^2 = x^2$.

2- Variations de la fonction carré :

Propriété : La fonction carré est **strictement décroissante** sur $] -\infty ; 0]$ et **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2		0	

Diagramme de variations : une flèche descendante de $-\infty$ à 0, et une flèche ascendante de 0 à $+\infty$.

Démonstration : Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$.

↳ **Démontrons que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$:**

Soient a et b deux réels de $[0 ; +\infty[$ tels que $0 \leq a < b$

Alors $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$.

Or $a < b$ donc $b - a > 0$, et puisque $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a donc $b + a > 0$ (strictement car $a < b$ donc a et b ne sont pas tous les deux nuls).

Ainsi, $f(b) - f(a) > 0$, donc $f(a) < f(b)$

$0 \leq a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ donc la fonction f est bien strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Démontrons que f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$:

Soient a et b deux réels de $] -\infty ; 0]$ tels que $a < b \leq 0$

Alors $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$.

Or $a < b$ donc $b - a > 0$, et puisque $a \leq 0$ et $b \leq 0$, on a donc $b + a < 0$ (strictement car $a < b$ donc a et b ne sont pas tous les deux nuls).

Ainsi, $f(b) - f(a) < 0$, donc $f(a) > f(b)$

$a < b \leq 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$ donc la fonction f est bien strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

3- Représentation graphique :

Un tableau de valeurs de la fonction associé est :

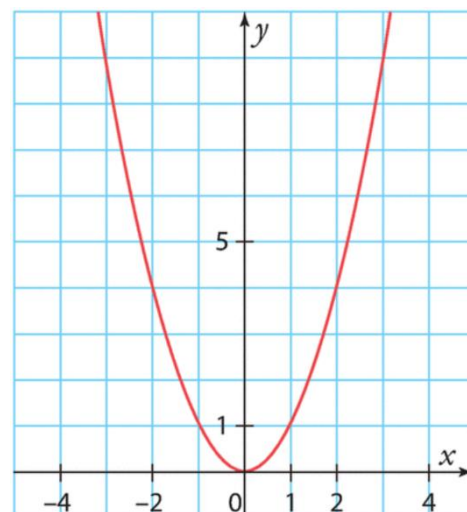
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

Sa courbe représentative est représentée ci-contre.

Remarques :

- La courbe représentative de la fonction carrée fait partie d'une famille de courbes appelées : **parabole**.

- La courbe représentative de la fonction carrée est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.



II] La fonction cube :

1- Définition et propriété :

Définition : La **fonction cube** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

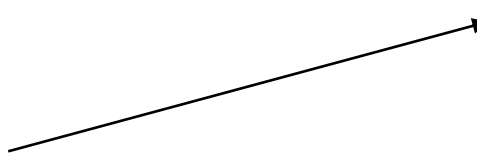
Propriété : La fonction cube est **impaire** sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout réel x , $(-x)^3 = -x^3$.

Démonstration : $\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^3 = (-1)^3 \times x^3 = -1 \times x^3 = -x^3$.

2- Variations de la fonction cube :

Propriété : La fonction cube est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		

3- Représentation graphique :

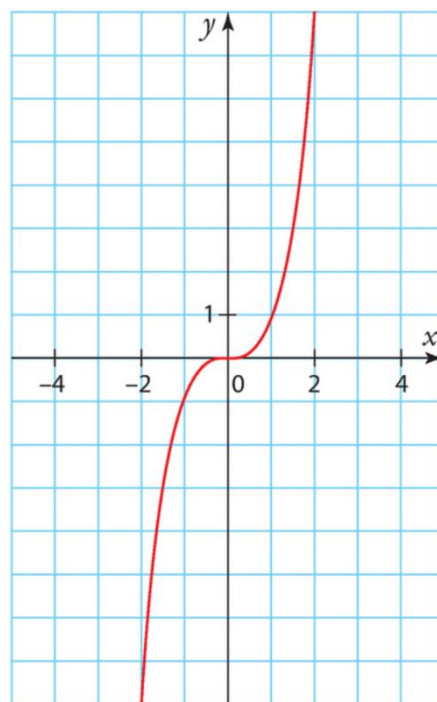
Un tableau de valeurs de la fonction associé est :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8

Sa courbe représentative est représentée ci-contre.

Remarque :

- La courbe représentative de la fonction cube est **symétrique par rapport au centre du repère**.



III] Fonction inverse :

1- Définition et propriété :

Définition : La **fonction inverse** f est définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarques : - L'ensemble $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$ est aussi noté $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$.

- 0 n'a pas d'image par la fonction inverse. Autrement dit, 0 est la valeur interdite de la fonction inverse.

Propriété : La fonction inverse est **impaire** sur $\mathbb{R}^*$. Autrement dit, pour tout réel x , $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$.

Démonstration : $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

2 - Variations de la fonction inverse :

Propriété : La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $] - \infty ; 0[$ et $]0 ; + \infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘		↘

Démonstration : Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$.

↳ **Démontrons que f est strictement décroissante sur $]0 ; + \infty[$:**

Soient a et b deux réels de $]0 ; + \infty[$ tels que $0 < a < b$

$$\text{Alors } f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

D'une part, $a < b$ donc $a - b < 0$.

D'autre part, $a > 0$ et $b > 0$ donc par produit $ab > 0$.

Ainsi, par quotient, $\frac{a-b}{ab} < 0$, autrement dit $f(b) - f(a) < 0$, donc $f(a) > f(b)$

$0 < a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ donc la fonction inverse est bien strictement décroissante sur $]0 ; + \infty[$.

↳ **Démontrons que f est strictement décroissante sur $] - \infty ; 0[$:**

Soient a et b deux réels de $] - \infty ; 0[$ tels que $a < b < 0$

$$\text{Alors } f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

D'une part, $a < b$ donc $a - b < 0$.

D'autre part, $a < 0$ et $b < 0$ donc par produit $ab > 0$.

Ainsi, par quotient, $\frac{a-b}{ab} < 0$, autrement dit $f(b) - f(a) < 0$, donc $f(a) > f(b)$

$a < b < 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$ donc la fonction inverse est bien strictement décroissante sur $] - \infty ; 0[$.

3- Représentation graphique :

Un tableau de valeurs de la fonction associé est :

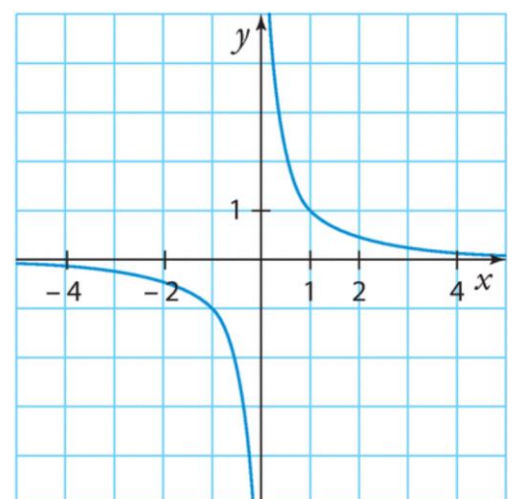
x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f(x)$	-0,5	-1	-2		2	1	0,5

Sa courbe représentative est représentée ci-contre.

Remarques :

- La courbe représentative de la fonction inverse fait partie d'une famille de courbes appelées : **hyperbole**.

- La courbe représentative de la fonction inverse est **symétrique par rapport à l'origine**.



IV] La fonction racine carrée :

1- Définition et propriété :

Définition : La fonction **racine carrée** est la fonction f définie sur $[0 ; + \infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Remarques : - L'ensemble $[0 ; +\infty[$ se note aussi $\mathbb{R}_+$. On a bien $0 \in \mathbb{R}_+$.

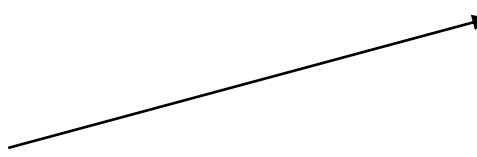
- La fonction racine carrée n'est pas définie sur $] - \infty ; 0[$ car la racine carrée d'un réel n'existe que si ce réel est positif ou nul.

2- Variations de la fonction racine carrée :

Propriété : La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Son tableau de variations sur $[0 ; +\infty[$ est :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$		



Démonstration : Soit f la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}^+$.

Démontrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

Soient a et b deux réels de $\mathbb{R}^+$ tels que $0 \leq a < b$

$$\text{Alors } f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \times 1 = (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \times \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

$(\sqrt{b} + \sqrt{a})$ est bien différent de 0 puisque a et b ne peuvent pas être nuls tous les deux, puisque $0 \leq a < b$

$$\text{donc } f(b) - f(a) = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

D'une part, puisque $a < b$, alors $b - a > 0$.

D'autre part, $\sqrt{b} > 0$ et $\sqrt{a} \geq 0$, donc par somme, $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$.

Donc par quotient, $\frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0$, autrement dit, $f(b) - f(a) > 0$, donc $f(a) < f(b)$

$0 \leq a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ donc la fonction racine carrée est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

3- Représentation graphique :

Un tableau de valeurs de la fonction associé est :

x	0	1	4	9	16
$f(x)$	0	1	2	3	4

Sa courbe représentative est représentée ci-contre.

