

Probabilités conditionnelles et indépendance

I] Probabilités conditionnelles :

1- Probabilité de A sachant B :

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω , avec $P(B) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle de A sachant B** est le nombre réel noté $P_B(A)$, défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La notation $P_B(A)$ se lit : « probabilité de A sachant B ».

Cela signifie que l'on calcule la probabilité de A en se limitant aux issues pour lesquelles B est réalisé.

On peut également rencontrer la notation : $P(A | B)$.

Ainsi : $P(A | B) = P_B(A)$.

Exemple : Dans un lycée, 40 % des élèves de première suivent la spécialité physique-chimie. Parmi ces élèves, 65 % suivent également la spécialité mathématiques.

On note :

↳ P : « l'élève suit la spécialité physique-chimie » ;

↳ M : « l'élève suit la spécialité mathématiques ».

L'information « parmi les élèves suivant la spécialité physique-chimie, 65 % suivent aussi la spécialité mathématiques » se traduit par :

$$P_P(M) = 0,65.$$

Il s'agit d'une probabilité conditionnelle : on se place uniquement parmi les élèves qui suivent la spécialité physique-chimie.

Attention : En général $P_A(B) \neq P_B(A)$.

Par exemple, la proportion d'élèves suivant mathématiques parmi ceux qui suivent physique-chimie n'est pas nécessairement égale à la proportion d'élèves suivant physique-chimie parmi ceux qui suivent mathématiques.

2- Probabilité d'une intersection :

Propriété : Formule des probabilités composées

Soient A et B deux événements relatifs à un univers Ω et de probabilités non nulles.

Alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

Interprétation sur un arbre : Dans un arbre pondéré, la **probabilité correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur ses branches.**

Exemple : Une médiathèque propose des romans et des bandes dessinées.

↳ 60 % des emprunts concernent des romans.

↳ Parmi les romans empruntés, 25 % sont des romans policiers.

On note :

↳ R : « le document emprunté est un roman » ;

↳ P : « le document emprunté est un roman policier ».

On a : $P(R) = 0,60$ et $P_R(P) = 0,25$

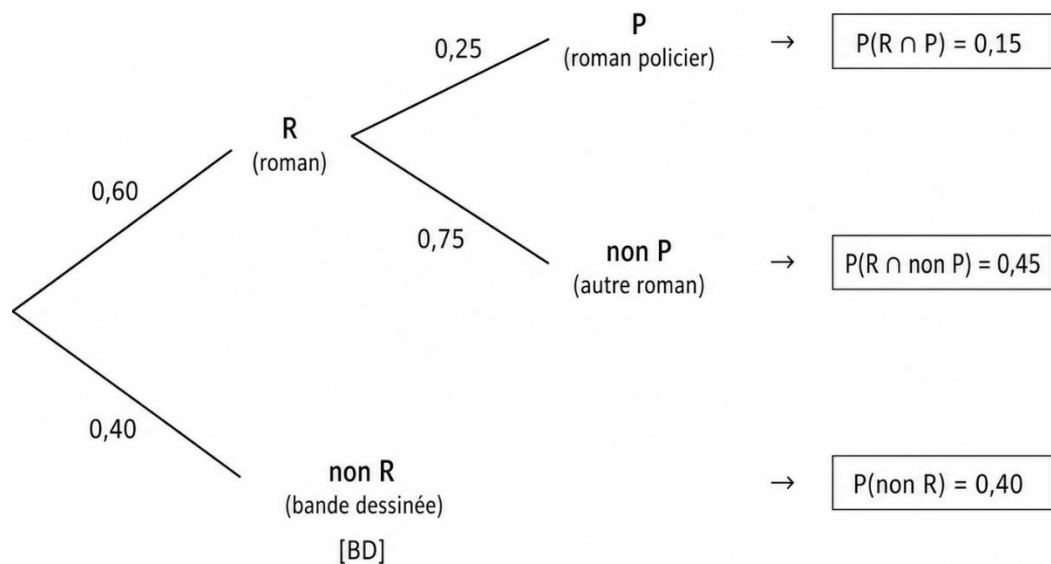
La probabilité que le document emprunté soit un roman policier est :

$$P(R \cap P) = P(R) \times P_R(P)$$

$$= 0,60 \times 0,25$$

$$= 0,15$$

Cette probabilité est donc égale à 0,15, soit 15 %.



II] Probabilités totales :

1- Partition de l'univers :

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit Ω un univers et soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements.

On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition de l'univers** Ω lorsque :

- ils sont deux à deux incompatibles :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour tous } i \neq j;$$

- leur réunion est égale à l'univers :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega.$$

Autrement dit, chaque issue de l'expérience appartient à **un et un seul** des événements $A_1, \dots, A_n$.

Exemple : On lance un dé équilibré à six faces.

On considère les événements :

- ↪ A_1 : « le résultat est 1 ou 2 » ;
- ↪ A_2 : « le résultat est 3 ou 4 » ;
- ↪ A_3 : « le résultat est 5 ou 6 ».

Ces trois événements sont deux à deux incompatibles et $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$. Ils forment donc une partition de l'univers.

2- Formule des probabilités totales :

Propriété : Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements formant une partition de l'univers Ω , et soit E un événement. Alors la **formule des probabilités totales** s'écrit :

$$P(E) = P(E \cap A_1) + P(E \cap A_2) + \dots + P(E \cap A_n)$$

Si les probabilités $P(A_i)$ sont non nulles, on obtient :

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \times P_{A_i}(E)$$

c'est-à-dire : $P(E) = P(A_1)P_{A_1}(E) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(E)$

Exemple : Dans une ville, les habitants utilisent trois moyens de transport pour se rendre au travail :

- ↪ 45 % utilisent la voiture ;
- ↪ 35 % utilisent les transports en commun ;
- ↪ 20 % utilisent le vélo.

On sait que :

- ↪ parmi les automobilistes, 10 % mettent moins de vingt minutes ;
- ↪ parmi les usagers des transports en commun, 30 % mettent moins de vingt minutes ;
- ↪ parmi les cyclistes, 70 % mettent moins de vingt minutes.

On choisit au hasard un habitant se rendant au travail.

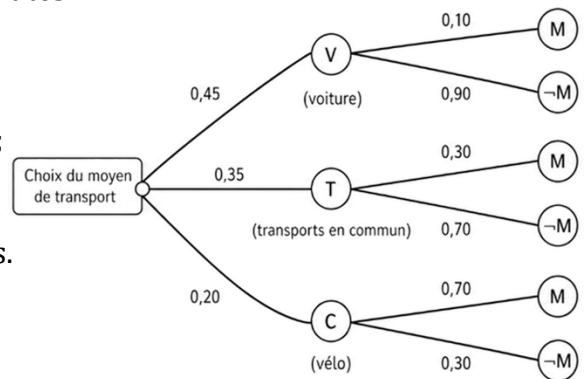
On note :

- ↪ V : « la personne utilise la voiture » ;
- ↪ T : « la personne utilise les transports en commun » ;
- ↪ C : « la personne utilise le vélo » ;
- ↪ M : « le trajet dure moins de vingt minutes ».

Les événements V , T et C forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(M) = P(V \cap M) + P(T \cap M) + P(C \cap M).$$



$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } P(M) &= P(V) \times P_V(M) + P(T) \times P_T(M) + P(C) \times P_C(M) \\ &= 0,45 \times 0,10 + 0,35 \times 0,30 + 0,20 \times 0,70 \\ &= 0,045 + 0,105 + 0,14 \\ &= 0,29 \end{aligned}$$

La probabilité que le trajet dure moins de vingt minutes est donc : $P(M) = 0,29$
Elle est égale à 29 %.

III] Indépendance de deux événements :

1- Définition :

Définition : Soient A et B deux événements.

On dit que A et B sont **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Cette définition reste valable même si l'une des probabilités est nulle.

Interprétation : Lorsque A et B sont indépendants, la réalisation de l'un des événements ne modifie pas la probabilité de l'autre.

2- Lien avec les probabilités conditionnelles :

Supposons que $P(A) \neq 0$.

$$\text{On sait que : } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\text{Par conséquent : } P_A(B) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

On obtient donc la propriété suivante.

Propriété : Si A et B sont deux événements indépendants et de probabilités non nulles, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Exemple : On lance un dé équilibré à six faces.

On considère les événements :

- ↪ A : « le résultat est pair » ;
- ↪ B : « le résultat est supérieur ou égal à 4 ».

On a : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ et $B = \{4 ; 5 ; 6\}$.

$$\text{Ainsi : } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ et } P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

De plus : $A \cap B = \{4 ; 6\}$,

$$\text{donc : } P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Or : } P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Comme : $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$, les événements A et B ne sont pas indépendants.