

Graphes

I] Généralités sur les graphes :

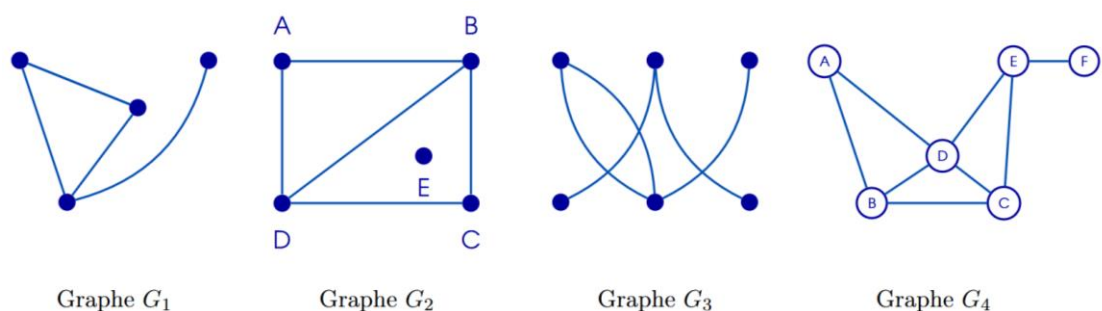
1- Premières définitions :

Définitions :

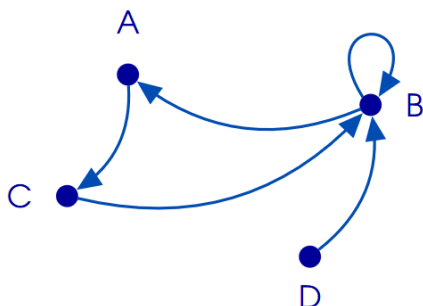
- ↗ Un **graphe** est un ensemble constitué de **sommets** pouvant être reliés par des **arêtes**.
- ↗ Un graphe est dit **orienté** lorsque ses arêtes ont un **sens de parcours**. Chaque arête a alors une **origine** et une **extrémité** et est représentée par une **flèche**.
- ↗ Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- ↗ Un **sommet** est dit **isolé** lorsqu'il n'est relié à aucun autre sommet du graphe.
- ↗ Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même.
- ↗ **L'ordre d'un graphe** est son nombre total de sommets.
- ↗ Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
- ↗ Un **graphe complet** est un graphe simple et dont tous les sommets sont adjacents deux à deux.

Remarque : Lorsqu'on détermine le degré d'un sommet comportant une boucle, il faut compter cette boucle deux fois : en effet, la boucle représente deux « chemins » partant de ce sommet. Elle compte double.

Exemples :



Le graphe G_1 a un ordre égal à 4, il possède un sommet de degré 1, deux sommets de degré 2 et un sommet de degré 3, et il n'a pas de sommet isolé. Aucun des graphes présentés n'est complet.

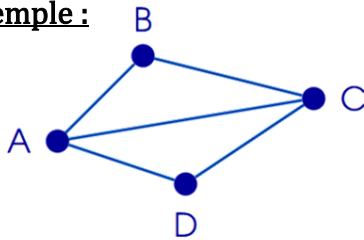


- A-C-B est un **chemin** de longueur 2.
- Le chemin D-B-C n'existe pas.
- D-B-A-C-B-A est un **chemin** de longueur 5.
- B-A-C-B-B est un **circuit** de longueur 4.

2- Lemme des poignées de mains :

Propriété : La **somme des degrés des sommets** d'un graphe non orienté est **égale au double du nombre total d'arêtes de ce graphe** (c'est donc nécessairement un nombre pair !)

Exemple :



- Le sommet A est de degré 3, le sommet B de degré 2, le sommet C de degré 3 et le sommet D de degré 2.
- La somme des degrés est $3 + 2 + 3 + 2 = 10$.
- Le graphe possède un total de 5 arêtes

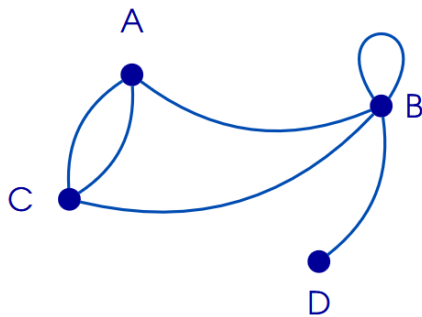
II] Chaînes et cycles d'un graphe :

1- Chaîne, longueur, cycle :

Définitions :

- ↗ Une **chaîne** d'un graphe G est une liste **ordonnée** de sommets de G telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.
- ↗ Une chaîne est dite **fermée** lorsque le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont confondus.
- ↗ La **longueur** d'une chaîne est le **nombre d'arêtes** qui la composent.
- ↗ Un **cycle** est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.

Exemple :



- A-B-C est une **chaîne de longueur 2**. (car il y a 2 arêtes).
- A-B-C-D **n'existe pas** car il n'existe pas de chaîne reliant C à D.
- D-B-A-C-B-D est une **chaîne fermée de longueur 5**. Ce n'est pas un cycle car on parcourt deux fois l'arête entre B et D.
- B-A-C-B est un **cycle de longueur 3**.

2- Graphe connexe :

Définition : Un graphe est dit **connexe** si on peut relier n'importe quelle paire de ses sommets par une chaîne.

Remarque : Un graphe **complet** est nécessairement **connexe**. (Bien entendu, la réciproque est fausse)

Exemples :

graphe connexe	graphe non connexe

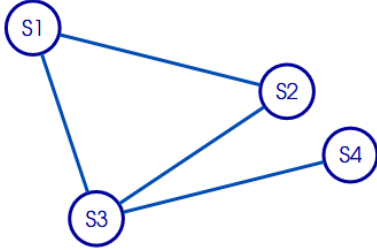
III] Matrice d'adjacence d'un graphe :

1- Représentation matricielle d'un graphe :

Définition : Soit n un entier naturel non nul et soit G un graphe **non orienté** d'ordre n .

On appelle **matrice associée à G** , (ou matrice d'adjacence de G) la matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n telle que a_{ij} soit égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j .

Exemple :

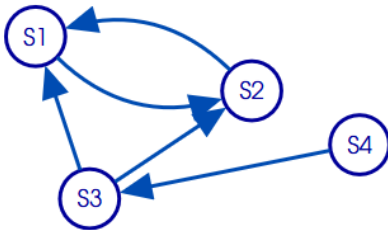


La matrice d'adjacence de ce graphe est
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition : Soit n un entier naturel non nul et soit G un graphe **orienté** d'ordre n .

On appelle **matrice associée à G** , (matrice d'adjacence de G), la matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n telle que a_{ij} soit égal au nombre d'arc d'origine le sommet i et d'extrémité le sommet j .

Exemple :



La matrice d'adjacence de ce graphe est
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2- Propriétés :

Propriétés :

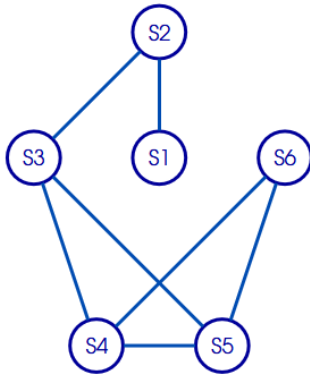
- ↪ La matrice d'adjacence d'un graphe **simple non orienté** ne présente **que des 0 et des 1** et sa diagonale ne comporte que des 0.
- ↪ La somme des coefficients de la i -ème ligne est égale au degré du i -ème sommet.
- ↪ Dans le cas d'un **graphe non orienté**, la matrice d'adjacence est **symétrique**.
- ↪ **Graphe non orienté :** la somme des coefficients de la matrice d'adjacence est égale au double du nombre d'arêtes du graphe.
- ↪ **Graphe orienté :** la somme des coefficients de la matrice d'adjacence est égale au nombre d'arcs du graphe.

3- Nombre de chaînes de longueur n d'un graphe :

Propriété : Soit G un graphe, M sa matrice d'adjacence et n un entier naturel non nul.

Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice ij de la matrice M^n .

Exemple :



Soit G le graphe ci-contre. La matrice d'adjacence de ce graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors déterminer, par un calcul ou à l'aide de la calculatrice, les matrices M^2 , M^3 et M^4 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Ces matrices donnent respectivement le nombre de chaînes de longueurs 2, 3 et 4, joignant chaque sommet du graphe à un autre sommet du graphe.

4- Graphe pondéré :

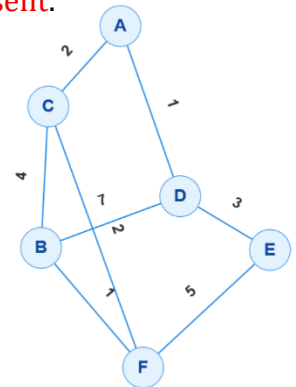
Définition :

- ↪ Un graphe est **pondéré** (orienté ou non) lorsque ses arêtes sont affectées de nombres positifs.
- ↪ Le **poids** d'une chaîne est la somme des poids des arêtes qui la composent.

Exemple : Les chaînes reliant B à D :

- ↪ B-D de poids 7
- ↪ B-C-A-D de poids $4 + 2 + 1 = 7$
- ↪ B-F-E-D de poids $1 + 5 + 3 = 8$
- ↪ B-F-C-A-D de poids $1 + 2 + 2 + 1 = 6$

Cette dernière est la plus courte pour relier B à D.



Remarque : Il existe un algorithme pour déterminer la chaîne la plus courte reliant deux sommets : l'algorithme de Moore-Dijkstra.

Mais il est souvent plus rapide sur des graphes simples de le faire de façon artisanale.

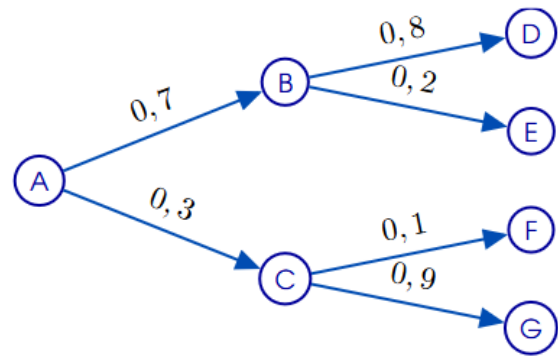
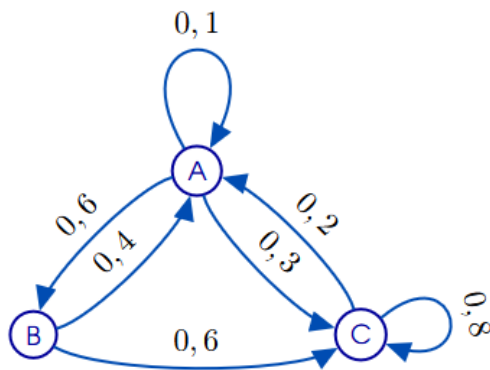
IV] Chaîne de Markov :

1- Graphe pondéré et graphe probabiliste :

Définitions :

- ↪ Un **graphe pondéré** est un graphe dans lequel chaque arête est affectée d'un nombre réel positif appelé poids de l'arête.
- ↪ Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré où tous les poids sont compris entre 0 et 1, et où pour chaque sommet, la somme des poids des arêtes partant du sommet vaut 1.

Exemples :



Un arbre de probabilité est donc un graphe probabiliste !

2- Chaînes de Markov :

Définitions : Soit une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble E .

- ↪ Les éléments de E sont appelés **états** et E est appelé **l'espace des états**.
- ↪ On dit que **(X_n) est une chaîne de Markov** si :
 1. pour tout i de E et tout entier naturel n , l'événement $X_{n+1} = i$ ne dépend que de l'état dans lequel est X_n et pas des précédents. (le futur ne dépend que du présent et non du passé)
 2. Pour tous i et j de E et tout entier naturel n , la **probabilité de transition** de l'état i vers l'état j est indépendante de n .

Exemple : Pierre va à l'école en bus ou en vélo. On sait que le premier jour, il y va en bus avec une probabilité de 0,2. On sait de plus qu'il y va en bus avec une probabilité de 0,3 s'il y est allé en bus la veille, et avec une probabilité de 0,8 s'il y est allé en vélo la veille.

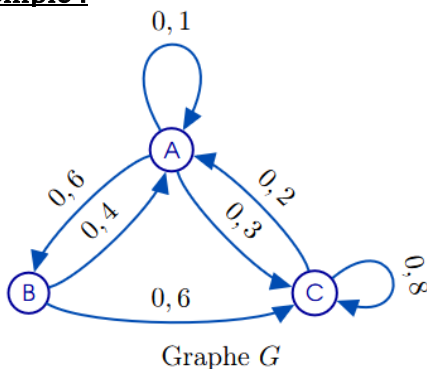
Ceci est bien une chaîne de Markov car ce qui se passe un jour ne dépend que du jour précédent, et parce que les probabilités de transition sont constantes. On a par exemple $P(X_0 = B) = 0,2$. Dessiner le graphe probabiliste correspondant.

3- Matrice de transition :

Définition : On considère une chaîne de Markov à k états numérotés de 1 à k et on note $E = \{1 ; 2 ; \dots ; k\}$ l'espace des états.

La **matrice de transition P** associée à cette chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre k telle que, pour tout couple $(i ; j) \in E^2$, le coefficient p_{ij} est la probabilité de transition de l'état i vers l'état j .

Exemple :



$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Matrice P de transition associée à G .

Remarques :

- ↪ Tous les coefficients sont des réels compris entre 0 et 1 ;

- ↪ La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 ;
- ↪ Le coefficient $t_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état S_j à l'instant $n + 1$ sachant que l'on est dans l'état S_i à l'instant n .

4- Évolution d'une chaîne de Markov :

Définitions : Soit (X_n) une chaîne de Markov. Pour tout entier naturel n , on note π_n la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n .

Alors π_0 est la **distribution initiale**, et π_n est la **distribution après n transitions** (ou à l'étape n).

Pour tout entier n , π_n est une matrice ligne et ayant autant de colonnes qu'il y a d'états possibles pour la variable aléatoire X_n . Les états sont toujours rangés dans un ordre prédéfinis.

Exemple : Dans l'exemple de Pierre, on a $\pi_0 = (0,2 \quad 0,8)$.

Propriété : Soit (X_n) une chaîne de Markov et P sa matrice de transition associée. Pour tout entier naturel n , on a : $\pi_{n+1} = \pi_n P$ et $\pi_n = \pi_0 P^n$.

5- Distribution invariante :

Définition : Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

On appelle **distribution invariante** de la chaîne de Markov une distribution π vérifiant $\pi P = \pi$.

Remarques :

- ↪ On peut parler parfois **d'état stable**.
- ↪ Il existe toujours au moins une distribution invariante.

Propriété : Soient (X_n) une chaîne de Markov et P sa matrice de transition. Pour tout entier naturel n , on note π_n la loi de probabilité de X_n .

S'il existe un entier $k \geq 1$ tel que P^k ne contienne aucun 0, **alors la suite de matrices (π_n) converge vers l'unique distribution invariante de cette chaîne de Markov.**

Ce résultat est indépendant de la distribution initiale π_0 .