

Variables aléatoires

I] Variable aléatoire et loi de probabilité :

1- Définition :

Définition : On considère une expérience aléatoire associée à un univers Ω .

Une **variable aléatoire** X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Ainsi, à chaque issue ω de l'expérience aléatoire, la variable aléatoire X associe un unique nombre réel $X(\omega)$.

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

Exemple : On lance une roue équilibrée comportant quatre secteurs numérotés 1, 2, 3 et 4.

Le joueur :

- ↗ gagne 5 € si la roue indique 1 ;
- ↗ gagne 2 € si elle indique 2 ou 3 ;
- ↗ perd 4 € si elle indique 4.

L'univers de l'expérience est : $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$.

On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, en euros. Alors :

$$G(1) = 5, \quad G(2) = 2, \quad G(3) = 2, \quad G(4) = -4.$$

Ainsi : $G(\Omega) = \{-4; 2; 5\}$.

On remarque que plusieurs issues peuvent être associées à une même valeur de la variable aléatoire.

Remarques :

- ↗ Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule : $X, Y, Z, T, G \dots$
- ↗ Pour tout réel k , on note l'événement « X prend la valeur k » sous la forme réduite « $X = k$ ».
- ↗ On notera de façon analogue « $X < k$ », « $X \leq k$ », « $X > k$ », « $X \geq k$ » ou encore « $X \neq k$ ».

2- Loi de probabilité :

Définition : Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs distinctes : $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Définir la **loi de probabilité** de X consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité : $p_i = P(X = x_i)$.

On représente généralement cette loi à l'aide d'un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Propriété : En reprenant les notations précédentes, on a :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Démonstration : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n)$

Or les événements $X = x_i$, pour tout entier i compris entre 1 et n , sont des événements incompatibles deux à deux et dont la réunion donne l'univers de l'expérience. Ils partitionnent donc l'univers et, par définition, la somme de leurs probabilités est égale à 1.

3- Déterminer une loi de probabilité:

Exemple n°1 : Lancer d'un dé

On lance un dé équilibré dont les six faces portent les nombres : 0,0,1,1,1,3.
On note X le nombre inscrit sur la face supérieure.

Déterminons la loi de probabilité de X .

Les valeurs prises par X sont : $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 3\}$.

Le dé étant équilibré, chacune de ses six faces a la même probabilité d'apparaître.

↪ Deux faces portent le nombre 0, donc : $P(X = 0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

↪ Trois faces portent le nombre 1, donc : $P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

↪ Une face porte le nombre 3, donc : $P(X = 3) = \frac{1}{6}$.

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	0	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Exemple n°2 : Jeu de cartes

Un sac contient 12 cartes indiscernables au toucher : 2 cartes dorées ; 4 cartes argentées ; 6 cartes blanches.

Le joueur tire une carte au hasard. Il reçoit :

- ↪ 8€ s'il tire une carte dorée ;
- ↪ 3€ s'il tire une carte argentée ;
- ↪ rien s'il tire une carte blanche.

La participation au jeu coûte 2€.

On note G le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la somme reçue diminuée du prix de la partie.
Les valeurs prises par G sont :

- ↪ $8 - 2 = 6$ si la carte est dorée ;
- ↪ $3 - 2 = 1$ si la carte est argentée ;
- ↪ $0 - 2 = -2$ si la carte est blanche.

Ainsi : $G(\Omega) = \{-2 ; 1 ; 6\}$.

Comme le tirage est effectué au hasard parmi 12 cartes :

$$\begin{aligned}P(G = 6) &= \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \\P(G = 1) &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\P(G = -2) &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La loi de probabilité de G est donc :

g_i	-2	1	6
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

4- Calculer la probabilité d'un événement lié à une variable aléatoire :

Pour calculer la probabilité d'un événement comme $X \leq a$, on additionne les probabilités correspondant à toutes les valeurs de X qui vérifient cette condition.

Exemple : On reprend la variable aléatoire G de l'exemple précédent.

Calculons $P(G > 0)$. Les valeurs strictement positives de G sont 1 et 6. Ainsi :

$$\begin{aligned}P(G > 0) &= P(G = 1) + P(G = 6) \\&= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Le joueur a donc une chance sur deux de réaliser un gain strictement positif.

De même :

$$P(G \leq 1) = P(G = -2) + P(G = 1)$$

donc

$$P(G \leq 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

II] Espérance, variance et écart-type :

Dans toute cette partie, on appelle X une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

1- Espérance :

a. Définition :

Définition : L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est le **nombre réel noté $E(X)$** défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

avec, pour tout entier i compris entre 1 et n , $p_i = P(X = x_i)$.

Remarque : L'espérance mathématique de X peut être interprétée comme une valeur moyenne de X dans le cas d'un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.

Exemple : Un jeu consiste à lancer un dé équilibré.

↗ Si le résultat est 1, le joueur gagne 10€.

↗ Si le résultat est 2 ou 3, il gagne 2€.

↗ Si le résultat est 4, 5 ou 6, il perd 4€.

On note G le gain algébrique du joueur.

La loi de G est :

g_i	-4	2	10
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Calculons l'espérance : $E(G) = (-4) \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{1}{6} = -2 + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = -2 + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$

Ainsi : $E(G) = \frac{1}{3}$

Sur un très grand nombre de parties, le joueur peut espérer gagner en moyenne environ 0,33€ par partie.

Attention : cela ne signifie pas qu'il gagnera 0,33€ à chaque partie.

Remarque sur les jeux :

Lorsque G désigne le gain algébrique d'un joueur :

- ↪ si $E(G) > 0$, le jeu est **favorable** au joueur ;
- ↪ si $E(G) < 0$, le jeu est **défavorable** au joueur ;
- ↪ si $E(G) = 0$, le jeu est **équitable**.

Dans l'exemple précédent $E(G) = \frac{1}{3} > 0$.

Le jeu est donc favorable au joueur.

Cette conclusion concerne le comportement moyen du jeu à long terme et ne garantit pas un gain lors d'une partie particulière.

b. Linéarité de l'espérance :

Propriété : Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

En particulier : $E(aX) = aE(X)$ et $E(X + b) = E(X) + b$

Démonstration : Si X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, alors $aX + b$ prend les valeurs $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$.

De plus, pour tout i : $P(aX + b = ax_i + b) = P(X = x_i) = p_i$

Posons $p_i = P(X = x_i)$. On a donc :

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b)p_i \\ E(aX + b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i p_i + bp_i) \\ E(aX + b) &= a \sum_{i=1}^n p_i x_i + b \sum_{i=1}^n p_i \end{aligned}$$

Or, par définition, $\sum_{i=1}^n p_i x_i = E(X)$ et la somme des probabilités vaut 1 ($\sum_{i=1}^n p_i = 1$).

On obtient donc :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

2) Variance et écart-type :

a. Définitions :

Définition : La **variance** de la loi de probabilité de X est le **nombre réel positif noté $V(X)$** défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

avec $p_i = P(X = x_i)$.

Autrement dit :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

Remarque : La variance est la moyenne des carrés des écarts entre les valeurs prises par X et l'espérance. On peut aussi écrire :

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Définition : L'écart-type de la loi de probabilité de X est le **nombre réel positif noté $\sigma(X)$** (sigma de X) défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple : La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-1	2	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	0,3

Calcul de l'espérance : $E(X) = (-1) \times 0,2 + 2 \times 0,5 + 4 \times 0,3$
 $= -0,2 + 1 + 1,2$
 $= 2$

Calcul de la variance : $V(X) = (-1 - 2)^2 \times 0,2 + 0,5(2 - 2)^2 + 0,3(4 - 2)^2$
 $= 0,2 \times 9 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 4$
 $= 1,8 + 1,2$
 $= 3$

Calcul de l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{3} \approx 1,73$

b. Deux propriétés de la variance :

Propriété : Formule de König-Huyghens

Pour toute variable aléatoire X , on a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Démonstration : Par définition $V(X) = E((X - E(X))^2)$.

Développons le carré : $(X - E(X))^2 = X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2$.

Par linéarité de l'espérance : $V(X) = E(X^2) - 2E(XE(X)) + E((E(X))^2)$

Comme $E(X)$ est un nombre réel constant : $E(XE(X)) = E(X) \times E(X) = (E(X))^2$
et $E((E(X))^2) = (E(X))^2$.

Ainsi : $V(X) = E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

D'où : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Exemple : La loi de probabilité d'une variable aléatoire Y est :

y_i	0	2	5
$P(Y = y_i)$	0,4	0,4	0,2

Calcul de l'espérance : $E(Y) = 0 \times 0,4 + 2 \times 0,4 + 5 \times 0,2$
 $= 0 + 0,8 + 1$
 $= 1,8$

Calcul de : $E(Y^2) = 0^2 \times 0,4 + 2^2 \times 0,4 + 5^2 \times 0,2$
 $= 0,2 \times 9 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 4$
 $= 0 + 4 \times 0,4 + 25 \times 0,2$
 $= 1,6 + 5$
 $= 6,6$

D'après la formule de König-Huyghens :

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ &= 6,6 - 1,8^2 \\ &= 6,6 - 3,24 \\ &= 3,36 \end{aligned}$$

Calcul de l'écart-type : $\sigma(Y) = \sqrt{3,36} \approx 1,83$

Propriété : Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

et

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

Démonstration pour la variance :

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \sum_{i=1}^n p_i ((ax_i + b) - E(aX + b))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (ax_i + b - (aE(X) + b))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (ax_i - aE(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (a(x_i - E(X)))^2 \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

Démonstration pour l'écart-type :

$$\begin{aligned} \sigma(aX + b) &= \sqrt{V(aX + b)}. \\ &= \sqrt{a^2 \times V(X)} \\ &= |a| \times \sqrt{V(X)} \\ &= |a| \times \sigma(X) \end{aligned}$$