Fonctions affines :

I] Définition :

Définition : Une fonction affine est une fonction qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

- a est le coefficient directeur de la fonction, il indique le sens de variation et l'inclinaison de la droite.
- b est l'ordonnée à l'origine, c'est l'image de 0, c'est-à-dire : $f(0) = b$. Graphiquement, b est l'ordonnée du point où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Exemple : La fonction qui, à un nombre x, associe son double augmenté de 4 est une fonction affine.
On la note $f : x \mapsto 2x + 4$ ou $f(x) = 2x + 4$.

- 2 est le coefficient directeur ;
- 4 est l'ordonnée à l'origine.

Remarque : Si $b = 0$, l'expression devient $f(x) = ax$. On obtient une fonction linéaire. Donc toute fonction linéaire est aussi une fonction affine.

II] Représentation graphique :

1- Tracer une fonction affine dans un repère :

Propriété : La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ **est une droite**.

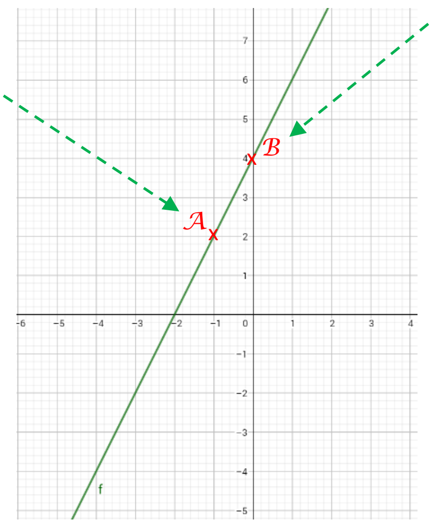
Exemple : Tracer la fonction affine $f(x) = 2x + 4$

Méthodologie :

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine, il faut **déterminer les coordonnées de 2 points par lesquels passe la droite.**

Comme la fonction affine ne passe pas forcément par l'origine du repère, on va **prendre 2 valeurs de x au choix et calculer leurs images**, c'est-à-dire leurs ordonnées.

Déterminons le 1er point :
Prenons par exemple $x = -1$ et calculons son image.
$f(-1) = 2 \times (-1) + 4 = -2 + 4 = 2$
L'image de -1 est 2.



Déterminons le 2ème point :
Prenons par exemple $x = 0$ et calculons son image.
$f(0) = 2 \times 0 + 4 = 4$
L'image de 0 est 4.

La droite passera par les points de coordonnées $A(-1 ; 2)$ et $B(0 ; 4)$.

2- Sens de variations d'une fonction affine :

Propriété : Soit une fonction f affine telle que : $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$ alors f est croissante.
- Si $a < 0$ alors f est décroissante
- Si $a = 0$, alors f est constante.

Exemples : $f(x) = 3x + 2$ est croissante car $a = 3 > 0$.
$g(x) = -2x + 5$ est décroissante car $a = -2 < 0$.
$h(x) = 4$ est constante car $a = 0$. En effet, $h(x) = 0x + 4$.

Remarque : Le sens de variation dépend **uniquement** du coefficient directeur.
L'ordonnée à l'origine n'influence pas le sens de variation.

III] Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine…

1- Par calcul :

Méthodologie : Déterminer l'expression d'une fonction affine, lorsqu'on donne deux nombres et leurs images, c'est trouver les valeurs de a et b.

Exemple : Déterminer la fonction affine f telle que $f(1) = 4$ et $f(3) = 8$.

Etape n°1 : Déterminer la valeur de a.

Pour déterminer la valeur de a, on applique la formule : $a = \dfrac{\overset{\text{Image du 1}^{\text{er}}\text{ point}}{f(x_1)} - \overset{\text{Image du 2}^{\text{ème}}\text{ point}}{f(x_2)}}{\underset{\text{Antécédent du 1}^{\text{er}}\text{ point}}{x_1} - \underset{\text{Antécédent du 2}^{\text{ème}}\text{ point}}{x_2}}$

Ici : $a = \dfrac{4-8}{1-3} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

Etape n°2 : Déterminer la valeur de b.

Pour déterminer la valeur de b, on résout l'équation $f(x) = ax + b$ à l'aide de l'une des deux égalités données dans l'énoncé **et** de la valeur de a trouvée précédemment.

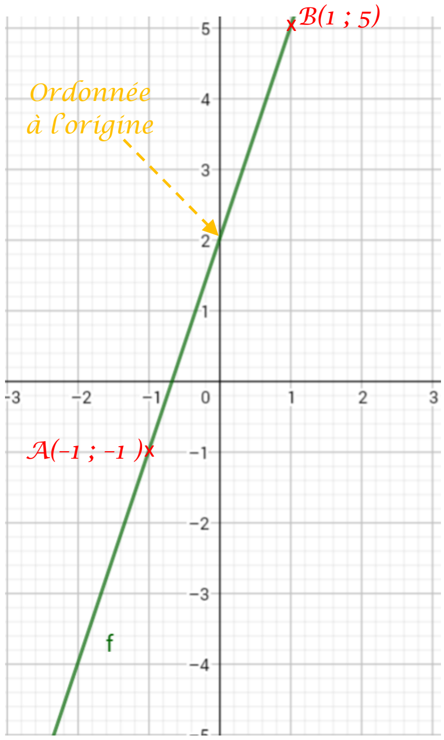
Ici : Si on prend la première égalité $f(1) = 4$
On sait que $a = 2$

Donc : $f(1) = 2 \times 1 + b = 4$
$2 + b = 4$
$2 + b - 2 = 4 - 2$
$b = 2$

Conclusion : Finalement la fonction affine f tel que $f(1) = 4$ et $f(3) = 8$ est $f(x) = 2x + 2$

2- Par lecture graphique :

On a tracé une fonction f en vert et une fonction g en bleu ci-dessous et on veut déterminer son expression.



Méthodologie :

Etape n°1 : Déterminer a le coefficient directeur.

- Placer deux points sur la droite.
- Calculer $a = \dfrac{\text{Ordonnée de B} - \text{Ordonnée de A}}{\text{Abscisse de B} - \text{Abscisse de A}}$

$$\text{Ici } a = \frac{5 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{5+1}{1+1} = \frac{6}{2} = 3$$

Etape n°2 : Déterminer b l'ordonnée à l'origine.

Lire l'ordonnée à l'origine de la droite c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées.

$$\text{Ici } b = 2$$

Donc : $f(x) = 3x + 2$