Puissances

I] Puissance d'un nombre relatif :

1- Exposant positif :

Définition : Soit a un nombre relatif et n un nombre entier positif.
« a exposant n » noté a^n, signifie que l'on va multiplier le nombre a, n fois par lui-même.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois le facteur } a}$$

Exemples : $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1\,024$
$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

2 – Cas de l'exposant 0 :

Propriété : Pour tout nombre $a \neq 0$, on convient que : $a^0 = 1$

Exemples : $5^0 = 1$
$(-3)^0 = 1$
⚠ $-3^0 = -(3^0) = -1$ car la puissance porte seulement sur le 3, pas sur le signe moins.

3- Importance des parenthèses :

Propriété : La puissance s'applique seulement au nombre ou à l'expression qui la précède.

Exemple : $(-7)^4 = (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) = 2\,401$

mais $-7^4 = -7 \times 7 \times 7 \times 7 = -2\,401$

Donc : $(-7)^4 \neq -7^4$

II] Puissances d'exposant négatif :

Définition : Pour tout nombre $a \neq 0$ et tout entier n positif,
On note a^{-n} l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois le facteur } a}}$

Exemple : 2^{-3} l'inverse de 2^3 : $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{8}$

II] Notation scientifique d'un nombre :

Définition : L'écriture scientifique d'un nombre est la seule écriture de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle :
- a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$;
- n est un nombre entier relatif.

Exemple n°1 : Donner l'écriture scientifique de 0,004 25

Etape n°1 : Déplacer la virgule pour que le nombre soit entre 1 et 10 (exclu).

Etape n°2 : Multiplier par une puissance de 10, pour revenir au nombre de départ.

0,004 25 → 4,25 → $4{,}25 \times 10^{-3}$

Je décale ma virgule de 3 rangs vers la gauche**.

Exemple n°1 : Donner l'écriture scientifique de 0,004 25

Etape n°1 : Déplacer la virgule pour que le nombre soit **entre 1 et 10 (exclu).**

Etape n°2 : Multiplier par une puissance de 10, **pour revenir au nombre de départ.**

3 750 000 → 3,75 → $3{,}75 \times 10^6$

Je décale ma virgule de 6 rangs vers la droite*.

III] Propriétés de calcul :

Pour tout a et b réel non nul, n et p entiers relatifs.

$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$(a^n)^p = a^{n \times p}$	$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$2^3 \times 2^5$ $= 2^{3+5}$ $= 2^8$ $10^5 \times 10^{-6}$ $= 10^{5-6}$ $= 10^{-1}$	$(3^4)^5$ $= 3^{4 \times 5}$ $= 3^{20}$ $(10^{-2})^3$ $= 10^{-2 \times 3}$ $= 10^{-6}$	$\frac{4^8}{4^3}$ $= 4^{8-3}$ $= 4^5$ $\frac{10^{-7}}{10^{-3}}$ $= 10^{-7-(-3)}$ $= 10^{-7+3}$ $= 10^{-4}$	$(4 \times 2)^2$ $= 4^2 \times 2^2$ $= 16 \times 4$ $= 64$ $5^5 \times 2^5$ $= (5 \times 2)^5$ $= 10^5$ $= 100\,000$	$\left(\frac{4}{5}\right)^2$ $= \frac{4^2}{5^2}$ $= \frac{16}{25}$

IV] Opérations contenant des puissances :

Calculer l'expression suivante et donner le résultat en notation scientifique :

$$A = \frac{2 \times 10^5 \times 4 \times 5 \times 10^{-2} \times 10^4}{10^{12} \times 20 \times 10^{-4}}$$

Méthodologie : On **regroupe** tous les nombres sur une même fraction et toutes les puissances de 10 sur une autre fraction.

$$A = \underbrace{\boxed{\frac{2 \times 4 \times 5}{20}}}_{\text{nombres}} \times \underbrace{\boxed{\frac{10^5 \times 10^{-2} \times 10^4}{10^{12} \times 10^{-4}}}}_{\text{puissances}}$$

$$A = \frac{40}{20} \times \frac{10^{5-2+4}}{10^{12-4}}$$

$$A = 2 \times \frac{10^7}{10^8}$$

$$A = 2 \times 10^{7-8}$$

$$A = 2 \times 10^{-1}$$