# Nombres premiers

## I] Nombres premiers :

**Définition :** Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

**Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :**
2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 29 – 31 – 37 – 41 – 43 – 47 – 53 – 59 – 61 – 67 – 71 – 73 – 79 – 83 – 89 – 97

**Exemples de nombres non premiers :**
8 n'est pas premier, car il est divisible par 1, 2, 4 et 8.
1 n'est pas premier, car il possède un seul diviseur : lui-même.
0 n'est pas premier, car il possède une infinité de diviseurs.

## II] Décomposition en produit de facteurs premiers :

**Propriété :** Un nombre entier supérieur ou égal à 2 **se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre près.**

**Méthodologie :**

1. On cherche le plus petit nombre premier qui divise le nombre (on commence par 2, puis 3, 5, 7, 11, …).
2. On divise, puis on recommence avec le quotient tant que la division "tombe juste".
3. Quand on ne peut plus diviser par ce nombre premier, on passe au nombre premier suivant.
4. On continue jusqu'à obtenir 1 (quand le quotient vaut 1, la décomposition est terminée).

**Exemple :** Décomposer de 1 320 et 4 235 en produit de facteurs premiers

| Nombre à diviser | Liste des facteurs premiers |
| --- | --- |
| 1 320 | 2 |
| 660 | 2 |
| 330 | 2 |
| 165 | 3 |
| 55 | 5 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

| Nombre à diviser | Liste des facteurs premiers |
| --- | --- |
| 4 235 | 5 |
| 847 | 7 |
| 121 | 11 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

La **décomposition en facteurs premiers** est obtenue en multipliant les nombres de la colonne liste des facteurs premiers.

$1320 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11$
$= 2^3 \times 3 \times 5 \times 11$

$4235 = 5 \times 7 \times 11 \times 11$
$= 5 \times 7 \times 11^2$

## III] PGCD (Plus grand diviseur commun) :

**Définition :** Le **plus grand diviseur commun** (PGCD) de deux entiers est le plus grand nombre capable de diviser 2 entiers de manière « complète » sans laisser de reste.

**Exemples :** Calculer le PGCD des couples de nombres suivants.

| (792 ; 1 620) | (40 ; 350) | (2 352 ; 8 624) | (4 ; 125) |
|---|---|---|---|

**Etape n°1 :** Décomposer les nombres en **produit de facteurs premiers**.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$ | $40 = 2^3 \times 5$ | $2\,352 = 2^4 \times 3 \times 7^2$ | $4 = 2^2$ |
| $1\,620 = 2^2 \times 3^4 \times 5$ | $350 = 2 \times 5^2 \times 7$ | $8\,624 = 2^4 \times 7^2 \times 11$ | $125 = 5^3$ |

**Etape n°2 : Multiplier les facteurs premiers communs, ayant l'exposant le plus petit.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| PGCD(792 ; 1 620) | PGCD(40 ; 350) | PGCD(2 352 ; 8 624) | PGCD(4 ; 125) |
| $= 2^2 \times 3^2$ | $=2 \times 5$ | $= 2^4 \times 7^2$ | $= 1$ |
| $= 36$ | $= 10$ | $= 784$ | Il n'y a pas de facteurs premiers communs. Le PGCD vaut donc 1. |

## IV] PPCM (Plus petit multiple commun) :

**Définition :** Le **plus petit multiple commun** (PPCM) de deux entiers est le plus petit multiple commun aux deux nombres.

**Exemples :** Calculer le PPCM des couples de nombres suivants.

| (792 ; 1 620) | (40 ; 350) | (2 352 ; 8 624) | (4 ; 125) |
|---|---|---|---|

**Etape n°1 :** Décomposer les nombres en **produit de facteurs premiers**.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$ | $40 = 2^3 \times 5$ | $2\,352 = 2^4 \times 3 \times 7^2$ | $4 = 2^2$ |
| $1\,620 = 2^2 \times 3^4 \times 5$ | $350 = 2 \times 5^2 \times 7$ | $8\,624 = 2^4 \times 7^2 \times 11$ | $125 = 5^3$ |

**Etape n°2 : Multiplier les facteurs premiers communs, ayant l'exposant le plus grand, par les facteurs premiers non communs avec leur exposant (s'ils en ont).**

| | | | |
|---|---|---|---|
| PPCM(792 ; 1 620) | PPCM(40 ; 350) | PPCM(2 352 ; 8 624) | PPCM(4 ; 125) |
| $= 2^3 \times 3^4 \times 5 \times 11$ | $= 2^3 \times 5^2 \times 7$ | $= 2^4 \times 3 \times 7^2 \times 11$ | $= 2^2 \times 5^3$ |
| $= 35\,640$ | $= 1\,400$ | $= 25\,872$ | $= 500$ |

## III] Simplification de fractions (fraction irréductible) :

**Définition :** Une **fraction est irréductible** lorsqu'elle est **simplifiée au maximum**.

**Méthodologie :** Comment rendre une fraction irréductible.

**Exemple :** Ecrire la fraction $\frac{168}{3\,626}$ sous la forme d'une fraction irréductible.

**Etape n°1 :** Décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers.

**Etape n°2 :** Simplifier le numérateur et le dénominateur en barrant les facteurs communs.

**Etape n°3 :** Multiplier les nombres restants se trouvant au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{168}{3\,626} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times 2 \times 3 \times \cancel{7}}{\cancel{2} \times \cancel{7} \times 7 \times 37} = \frac{2 \times 2 \times 3}{7 \times 37} = \frac{12}{259}$$

La forme irréductible de $\frac{168}{3\,626}$ est $\frac{12}{259}$.