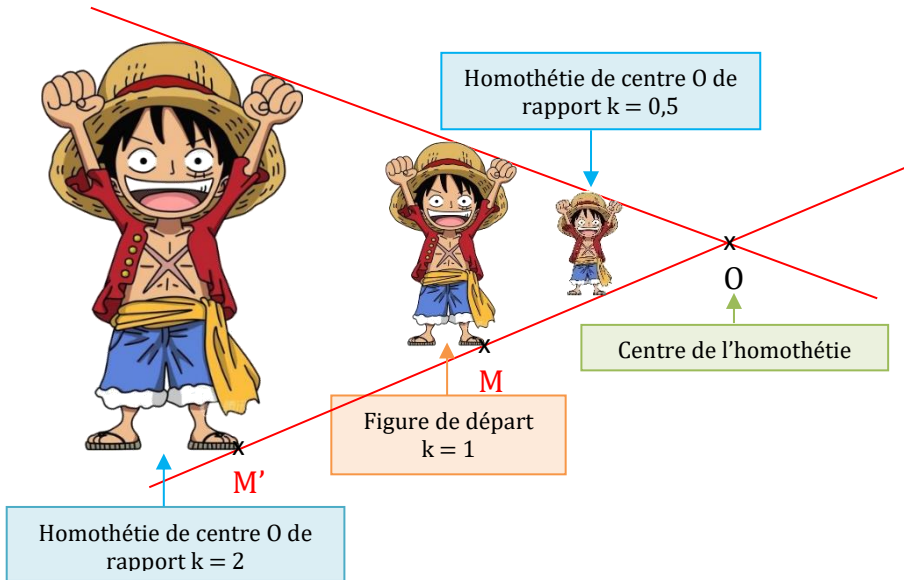


Homothéties

I] Définition :

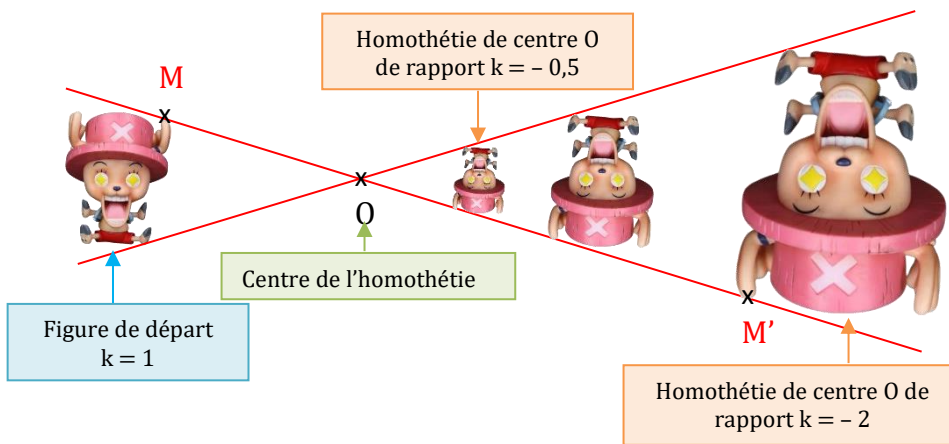
Définition : Une **homothétie de rapport k** (k est un nombre relatif) est une **transformation géométrique** permettant d'**agrandir** ou de **réduire** une **figure** par rapport à un point appelé le **centre de l'homothétie**.

1- Homothétie de rapport positif :



- M' est **l'image** de M par l'homothétie de **centre O** et de **rapport 2** , signifie que :
- O, M et M' sont alignés.
- M et M' **sont du même côté** par rapport à O .
- $OM' = 2 \times OM$

2- Homothétie de rapport négatif :



- M' est **l'image** de M par l'homothétie de **centre O** et de **rapport $-0,5$** signifie que :
- O, M et M' sont alignés.
- M et M' **sont part et d'autre** de O .
- $OM' = 0,5 \times OM$

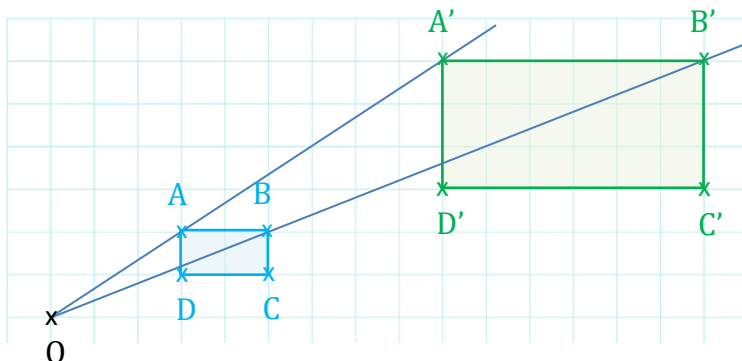
Remarques :

- Si $k > 1$ ou si $k < -1$, alors l'homothétie correspond à un **agrandissement**.
- Si $-1 < k < 1$, alors l'homothétie correspond à une **réduction**.

II] Centre et rapport d'une homothétie :

1- Comment retrouver le centre d'une homothétie ?

On considère la figure suivante où $A'B'C'D'$ est l'image du rectangle $ABCD$ par homothétie dont on souhaite déterminer son centre.



Méthodologie :

Etape n°1 : Tracer une droite qui passe par un point et son image, exemple A et A'.

Etape n°2 : Tracer une deuxième droite qui passe par un autre point et son image, exemple B et B'.

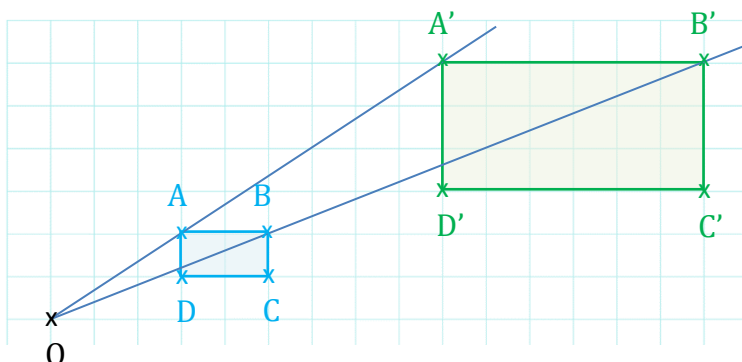
L'intersection de ses deux droites est **le centre de l'homothétie**.

Remarque : Il faut un minimum de deux droites pour trouver le centre d'homothétie. En effet, si on trace une troisième droite, une quatrième et ainsi de suite, alors elles passeront toutes par le même point d'intersection trouvé précédemment à l'aide des deux premières droites.

2- Comment trouver le rapport d'une homothétie ?

Trouver **le rapport de l'homothétie**, c'est trouver le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs de la figure de départ aux longueurs de l'image.

Exemple : On considère la figure suivante où $A'B'C'D'$ est l'image du rectangle $ABCD$ par de centre O dont on souhaite déterminer le rapport.



Méthodologie :

Appelons k le rapport de l'homothétie.

$$k = \frac{\text{Distance entre le centre de l'homothétie et un sommet image}}{\text{Distance entre le centre de l'homothétie et son sommet initial}}$$

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{9}{3} = 3$$

On peut bien entendu calculer les rapports $\frac{OB'}{OB}$; $\frac{OC'}{OC}$; $\frac{OD'}{OD}$ qui donneront le même résultat.

$$k = \frac{\text{Longueur d'un côté de l'image}}{\text{Longueur de son côté de la figure de départ}}$$

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{6}{2} = 3$$

On peut bien entendu calculer les rapports $\frac{B'C'}{BC}$; $\frac{C'D'}{CD}$; $\frac{D'A'}{DA}$ qui donneront le même résultat.

III] Construction :

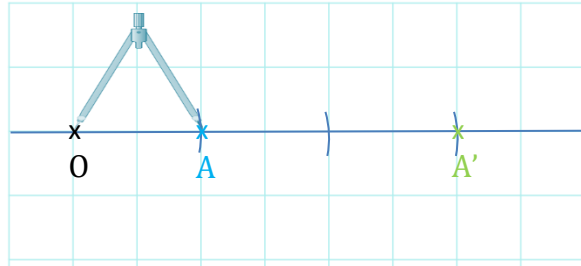
1- Construction d'un point par homothétie :

Construire A' l'image du point A par l'**homothétie** de **centre O** de rapport **3**.

Méthodologie :

Étape n°1 : Tracer la droite (OA) passant par O le centre de l'homothétie et A le point dont on cherche à tracer son image.

Étape n°2 : Reporter 3 fois la longueur OA **en partant de O** le centre de l'homothétie **le long de la droite (OA) vers A puisque le rapport de l'homothétie est positif.**

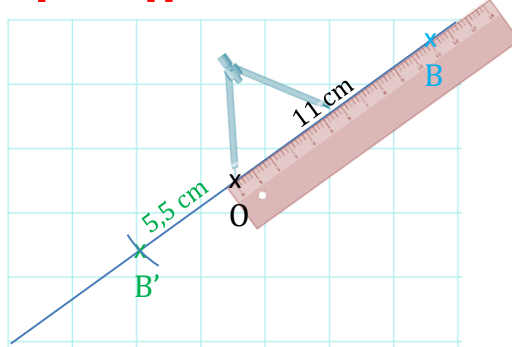


Construire B' l'image du point B par l'**homothétie** de **centre O** de rapport **$-0,5$** .

Méthodologie :

Étape n°1 : Tracer la droite (OB) passant par O le centre de l'homothétie et B le point dont on cherche à tracer son image.

Étape n°2 : Reporter la moitié de la longueur OB **en partant de O** le centre de l'homothétie **le long de la droite (OB) de l'autre côté de O puisque le rapport de l'homothétie est négatif.**



2- Construction d'une figure par homothétie :

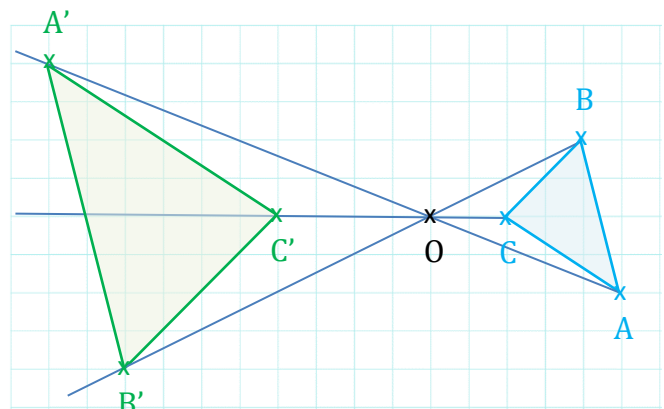
Construire $A'B'C'$ l'image du triangle ABC par l'**homothétie** de **centre O** de rapport **-2** .

Méthodologie :

On construit respectivement les images A' , B' et C' des points A , B et C par l'**homothétie** de **centre O** et de rapport **-2** .

Étape n°1 : On construit A' l'image de A , par exemple :

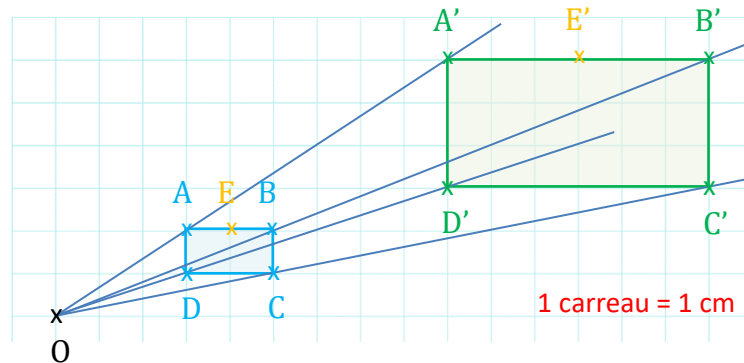
- On trace la droite (OA) .
- On reporte 2 fois la longueur OA **en partant de O** le long de la droite (OA) **de l'autre côté de A puisque le rapport de l'homothétie est négatif.**



Etapes n°2 et n°3 : De la même manière, on construit B' l'image de B et C' l'image de C .

IV] Propriétés de l'homothétie :

On considère la figure suivante où, $A'B'C'D'$ est l'image du rectangle $ABCD$ par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 3$.



Propriété n°1 :

L'homothétie conserve,

- **l'alignement** : A, E et B sont alignés donc A', E' et B' sont aussi alignés.

- **les milieux** : E est le milieu de $[AB]$ donc E' est le milieu de $[A'B']$

- **le parallélisme** : $(AD) // (BC)$ donc $(A'D') // (B'C')$

- **la mesure des angles** : $\widehat{ADE} = \widehat{A'D'E'} = 90^\circ$

Propriété n°2 :

Dans une homothétie de rapport $k > 0$,

- **Les longueurs sont multipliées par k** ;

$$AB = 2 \text{ cm}$$

$$A'B' = 3 \times AB$$

$$A'B' = 3 \times 2$$

$$A'B' = 6 \text{ cm}$$

- **Les aires sont multipliées par k^2** .

$$\text{Aire}(A'B'C'D') = 3^2 \times \text{Aire}(ABCD)$$

$$\text{Aire}(A'B'C'D') = 3^2 \times 2$$

$$\text{Aire}(A'B'C'D') = 9 \times 2$$

$$\text{Aire}(A'B'C'D') = 18 \text{ cm}^2$$