Opérations sur les événements et calcul de probabilités

Exercice n°1 : Dans une urne, la probabilité de tirer une bille rouge est $p(R) = \frac{4}{9}$.
Quelle est la probabilité de ne pas tirer une bille rouge ?

Exercice n°2 : Un sondage : 60 % des personnes aiment les jeux de plateau (événement A), 45 % aiment les casse-têtes (événement B), et 20 % aiment les deux.
Calculer $p(A \cup B)$.

Exercice n°3 : On connaît : $p(A) = \frac{5}{8}$, $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$
Calculer $p(B)$.

Exercice n°4 : Dans une usine, A = le produit est déclaré « ok » au test 1, B = le produit est déclaré « ok » au test 2.
On sait que A et B sont incompatibles (ne peuvent pas se produire ensemble), $p(A) = 0{,}35$ et $p(B) = 0{,}25$.
1) Calculer $p(\overline{A})$.
2) Calculer $p(\overline{B})$.
3) Calculer $p(A \cup B)$.

Exercice n°5 : Lors d'un contrôle, la probabilité qu'un élève réussisse la partie A est $p(A) = 0{,}70$, la partie B est $p(B) = 0{,}40$.
On sait que la probabilité qu'il réussisse au moins une des deux parties est $p(A \cup B) = 0{,}85$.
Calculer $p(A \cap B)$.

Exercice n°6 : Parmi les abonnés, $p(A) = \frac{2}{5}$ (abonné à la lettre A), $p(B) = \frac{3}{7}$ (abonné à la lettre B), et $p(A \cap B) = \frac{1}{7}$ (abonnés aux deux).
Calculer $p(A \cup B)$.

Exercice n°7 : Lors d'un match, $p(\overline{A}) = 0{,}40$ où A = « l'équipe marque au moins un but ». On sait aussi $p(B) = 0{,}35$ où B = « l'équipe adverse marque ».
On suppose A et B incompatibles.
calculer $p(A)$ et $p(A \cup B)$.

Exercice n°8 : On sait $p(A) = 0{,}55$, $p(A \cap B) = 0{,}20$ et $p(A \cup B) = 0{,}75$
Calculer $p(B)$.

Exercice n°9 : Dans un club de lecture, C est l'événement « la personne aime les romans » et D est l'événement « la personne aime les biographies ».
On sait que $p(C) = 0{,}65$ et $p(D) = 0{,}45$.
Ces deux événements peuvent-ils être incompatibles ?

Exercice n°10 : Soient X et Y deux événements tels que $p(X) = 0{,}40$, $p(Y) = 0{,}55$ et $p(X \cup Y) = 0{,}78$.
Calculer :

a) $p(X \cap Y)$
b) $p(X \cup Y)$
c) $p(\overline{X \cap Y})$

Exercice n°11 : On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 111 à 121212. On considère les événements :

- A : « le nombre obtenu est multiple de 3 ».
- B : « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 7 ».

1) Décrire en une phrase les événements :
   a. $A \cap B$
   b. $A \cup B$
   c. $\overline{A} \cap B$
   d. $A \cup \overline{B}$

2) Pour chacun, déterminer le nombre d'issues qui le réalisent et en déduire la probabilité.

Exercice n°12 : Claire a 15 magazines dans sa pile. Voici la répartition.

	Mode	Sciences	BD	Total
Achetés	3	2	4	9
Empruntés	2	3	1	6
Total	5	5	5	15

On choisit un magazine au hasard. On note :
R = « le magazine choisi est un mode ».
E = « le magazine choisi est emprunté ».

1) Décrire par une phrase $R \cap E$ et $R \cup E$.
2) Déterminer $p(R)$, $p(E)$, $p(R \cap E)$ et $p(R \cup E)$.
3) Définir $\overline{R}$ et donner $P(\overline{R})$

Correction

<u>Exercice n°1 :</u> Dans une urne, la probabilité de tirer une bille rouge est $p(R) = \frac{4}{9}$.

Quelle est la probabilité de ne pas tirer une bille rouge ?

$p(\overline{R}) = 1 - p(R)$

$p(\overline{R}) = 1 - \frac{4}{9}$

$p(\overline{R}) = \frac{9}{9} - \frac{4}{9}$

$p(\overline{R}) = \frac{5}{9}$

<u>Exercice n°2 :</u> Un sondage : 60 % des personnes aiment les jeux de plateau (événement A), 45 % aiment les casse-têtes (événement BBB), et 20 % aiment les deux.

Calculer $p(A \cup B)$.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

$p(A \cup B) = 0{,}60 + 0{,}45 - 0{,}20$.

$p(A \cup B) = 0{,}85$

<u>Exercice n°3 :</u> On connaît : $p(A) = \frac{5}{8}$, $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$

Calculer $p(B)$.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B)$

$p(B) = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} + \frac{1}{4}$

$p(B) = \frac{6}{8} - \frac{5}{8} + \frac{2}{8}$

$p(B) = \frac{3}{8}$

<u>Exercice n°4 :</u> Dans une usine, A = le produit est déclaré « ok » au test 1, B = le produit est déclaré « ok » au test 2.

On sait que A et B sont incompatibles (ne peuvent pas se produire ensemble), $p(A) = 0{,}35$ et $p(B) = 0{,}25$.

1) Calculer $p(\overline{A})$.

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$

2) Calculer $p(\overline{B})$.

$p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

3) Calculer $p(A \cup B)$.

Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cap B) = 0$.

Donc : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}35 + 0{,}25 - 0 = 0{,}60$.

<u>Exercice n°5 :</u> Lors d'un contrôle, la probabilité qu'un élève réussisse la partie A est $p(A) = 0{,}70$, la partie B est $p(B) = 0{,}40$.

On sait que la probabilité qu'il réussisse au moins une des deux parties est $p(A \cup B) = 0{,}85$.

Calculer $p(A \cap B)$.

$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$
$p(A \cap B) = 0{,}70 + 0{,}40 - 0{,}85$
$p(A \cap B) = 0{,}25$

<u>Exercice n°6 :</u> Parmi les abonnés, $p(A) = \frac{2}{5}$ (abonné à la lettre A), $p(B) = \frac{3}{7}$ (abonné à la lettre B), et $p(A \cap B) = \frac{1}{7}$ (abonnés aux deux).
Calculer $p(A \cup B)$.
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$p(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7}$
$p(A \cup B) = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} - \frac{5}{35}$
$p(A \cup B) = \frac{24}{35}$

<u>Exercice n°7 :</u> Lors d'un match, $p(\overline{A}) = 0{,}40$ où A = « l'équipe marque au moins un but ». On sait aussi $p(B) = 0{,}35$ où B = « l'équipe adverse marque ».
On suppose A et B incompatibles.
calculer $p(A)$ et $p(A \cup B)$.
$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$
Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cap B) = 0$.
Donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0{,}60 + 0{,}35 = 0{,}95$

<u>Exercice n°8 :</u> On sait $p(A) = 0{,}55$, $p(A \cap B) = 0{,}20$ et $p(A \cup B) = 0{,}75$
Calculer $p(B)$.
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B)$
$p(B) = 0{,}75 - 0{,}55 + 0{,}20$
$p(B) = 0{,}40$

<u>Exercice n°9 :</u> Dans un club de lecture, C est l'événement « la personne aime les romans » et D est l'événement « la personne aime les biographies ».
On sait que $p(C) = 0{,}65$ et $p(D) = 0{,}45$.
Ces deux événements peuvent-ils être incompatibles ?
Deux événements sont incompatibles si $p(C \cap D) = 0$.
Or si C et D étaient incompatibles alors $p(C \cup D) = p(C) + p(D)$.
Mais $p(C) + p(D) = 0{,}65 + 0{,}45 = 1{,}10$
Une probabilité d'union ne peut pas dépasser 1, il est impossible d'avoir $p(C \cup D) = 1{,}10$
Conclusion : C et D ne peuvent pas être incompatibles.

<u>Exercice n°10 :</u> Soient X et Y deux événements tels que $p(X) = 0{,}40$, $p(Y) = 0{,}55$ et $p(X \cup Y) = 0{,}78$.
Calculer :
a) $p(X \cap Y)$
$p(X \cap Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cup Y)$
$p(X \cap Y) = 0{,}40 + 0{,}55 - 0{,}78$
$p(X \cap Y) = 0{,}17$

b) $p(X \cup Y)$
$p(X \cup Y)$ est donnée : 0,78.

c) $p(\overline{X \cap Y})$
$p(\overline{X \cap Y}) = 1 - p(X \cap Y) = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$

<u>**Exercice n°11 :**</u> On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 111 à 121212. On considère les événements :

- A : « le nombre obtenu est multiple de 3 ».
- B : « le nombre obtenu est inférieur ou égal à 7 ».

1) Décrire en une phrase les événements :

a. $A \cap B$: « le nombre est multiple de 3 et ≤ 7 ».

b. $A \cup B$: « le nombre est multiple de 3 ou ≤ 7 (ou les deux) ».

c. $\overline{A} \cap B$: « le nombre est ≤ 7 et **pas** multiple de 3 ».

d. $A \cup \overline{B}$: « le nombre est multiple de 3 ou strictement supérieur à 7 (ou les deux) ».

2) Pour chacun, déterminer le nombre d'issues qui le réalisent et en déduire la probabilité.
$A \cap B$: éléments communs $= \{3, 6\} \rightarrow |A \cap B| = 2$
$p(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{3}$

$A \cup B$: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 7 - 2 = 9$
$p(A \cup B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\overline{A} \cap B$: c'est $B \backslash A$ donc $|\overline{A} \cap B| = 7 - 2 = 5$
$p(\overline{A} \cap B) = \frac{5}{12}$

$A \cup \overline{B}$: $\overline{B} = \{8, 9, 10, 11, 12\}$
$A \cup \overline{B} = \{3, 6, 9, 12\} \cup \{8, 9, 10, 11, 12\} = \{3, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$
$|A \cup \overline{B}| = 7$
$p(A \cup \overline{B}) = \frac{7}{12}$

<u>**Exercice n°12 :**</u> Claire a 15 magazines dans sa pile. Voici la répartition.

	Mode	Sciences	BD	Total
Achetés	3	2	4	9
Empruntés	2	3	1	6
Total	5	5	5	15

On choisit un magazine au hasard. On note :
R = « le magazine choisi est un mode ».
E = « le magazine choisi est emprunté ».

1) Décrire par une phrase $R \cap E$ et $R \cup E$.

$R \cap E$: « le magazine choisi est un mode et il est emprunté ».

$R \cup E$: « le magazine choisi est un mode ou il est emprunté (ou les deux) ».

2) Déterminer $p(R)$, $p(E)$, $p(R \cap E)$ et $p(R \cup E)$.

R (mode) : total colonne Mode = 5.

$p(R) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

E (emprunté) : total ligne Empruntés = 6.

$p(E) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$R \cap E$: case « Mode & Emprunté » = 2.

$p(R \cap E) = \frac{2}{15}$

$p(R \cup E) = p(R) + p(E) - p(R \cap E)$

$p(R \cup E) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{15}$

$p(R \cup E) = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{2}{15}$

$p(R \cup E) = \frac{9}{15}$

$p(R \cup E) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

3) Définir $\overline{R}$ et donner $P(\overline{R})$

$\overline{R}$ = « le magazine choisi n'est pas un mode » (donc Science ou BD).

Nombre d'issues favorables = total $- |R| = 15 - 5 = 10$

$P(\overline{R}) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$