Probabilités

I] Vocabulaire :

1 - Expérience, issue et univers :

Définitions :

- Une expérience est dite **aléatoire** si on ne peut pas en prévoir le résultat à l'avance.
- Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé une **issue**.
- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé **l'univers** de cette expérience. Généralement on le **note Ω (« Omega »).**

Exemple : On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on note le numéro porté par la face supérieure.
Cette expérience admet 6 issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

2 - Évènements :

a. Définitions :

Définition : Un **événement** est une **partie de l'univers d'une expérience aléatoire** : **c'est donc un ensemble d'issues.**

Exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
« Obtenir un chiffre impair » est l'évènement constitué des issues : 1 ; 3 et 5.

b. Évènements particuliers :

Définitions :

- On appelle « **événement certain** » un événement qui se réalise toujours.
- On appelle « **événement impossible** » un événement qui ne peut jamais se réaliser.

On peut le noter $\emptyset$ (« ensemble vide »).

- On appelle « **événement élémentaire** » un événement qui ne contient qu'une seule issue.

Exemples : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
« On obtient un nombre inférieur ou égal à 6 » est un événement certain.
« On obtient 9 » est un événement impossible.
« On obtient 1 » est un événement élémentaire.

c. Événement contraire (ou complémentaire) :

Définition : Soit E un événement d'une expérience. On appelle **événement contraire** (ou complémentaire), l'événement, noté $\overline{E}$ (« E barre »), réalisé par toutes les issues ne réalisant pas l'événement E (Ils n'ont aucune issue en commun).

Exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Soit E l'événement « obtenir 1, 5, ou 6 ».
Alors l'événement contraire de $\overline{E}$ est l'événement E : « obtenir 2, 3 ou 4 ».

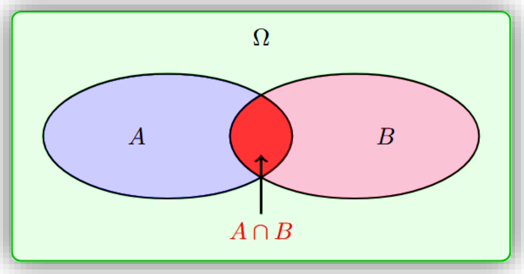
d. Événements incompatibles :

Définition : Soient E et F deux événements d'une même expérience. On dit que **E et F sont incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

Exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Soit E l'événement « obtenir 5 » et F l'événement « obtenir un nombre pair ».
E et F sont incompatibles.

3 - Réunion et intersection d'événements :

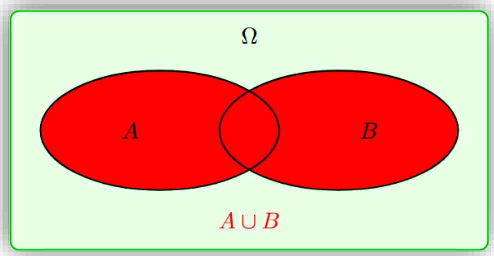
Définition : Soient A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.
On appelle **intersection** de A et de B et on note **$A \cap B$ (« A inter B »)** l'événement constitué des issues qui sont à la fois dans A et dans B.



Exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Soit A l'événement « On obtient un nombre pair » ;
Soit B l'événement « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 ».
Alors $A \cap B$ est l'événement « On obtient un nombre pair et qui soit supérieur ou égal à 3 », soit « On obtient 4 ou 6 »

Remarque : Si A et B sont incompatibles, alors l'événement $A \cap B$ est un événement impossible. On a alors $A \cap B = \emptyset$.

Définition : Soient A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.
On appelle **réunion de A et de B** et on note **$A \cup B$ (« A union B »)** l'événement constitué des issues qui sont dans A, ou dans B ou dans les deux.



Exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Soit A l'événement « On obtient un nombre pair » ;
Soit B l'événement « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 ».
Alors $A \cup B$ est l'événement « On obtient un nombre pair ou bien un nombre supérieur ou égal à 3, ou les deux », soit « On obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 »

II] Probabilités sur les ensembles finis :

On ne s'intéresse ici qu'à des expériences ayant un nombre fini de résultats possibles.
Donc Ω a aussi un nombre fini d'éléments (et à fortiori tous les événements, qui sont des parties de Ω), on peut donc les compter.

1 - Loi des grands nombres et probabilités :

Propriété : Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement A de l'expérience se stabilisent autour d'une valeur lorsque n devient grand.
Cette valeur s'appelle la **probabilité** de l'événement A.

Exemple : On lance un dé équilibré et on note le nombre de fois où l'on obtient le chiffre 4.

Nombre de lancers n	10	50	100	500	1 000	10 000	100 000
Nombre de 4 obtenu	3	10	19	76	161	1 681	16 649
Fréquence d'apparition du chiffre 4	0,30	0,20	0,19	0,152	0,161	0,161 8	0,166 49

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur six de sortir, soit $\frac{1}{6} \approx 0{,}1666\ldots$
La fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente. On note : $p(4) = \frac{1}{6}$.

2 - Loi de probabilité :

Définition : On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω est **fini** et est formé de n issues :

$$\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$$

Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est associer à chaque évènement élémentaire e_i sa probabilité p_i.
On la représente à l'aide d'un tableau :

Valeurs e_i	e_1	e_2	…	e_n
Probabilité p_i	p_1	p_2	…	p_n

Propriété : La somme des probabilités élémentaires est égale à 1.

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Exemple : Une urne contient 10 jetons,
deux jetons portent le $n°1$, trois jetons portent le $n°2$, cinq jetons portent le $n°3$.

- On tire un jeton au hasard et on note son numéro.
- L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3\}$.
- $p(1) = \frac{2}{10}$, $p(2) = \frac{3}{10}$ et $p(3) = \frac{5}{10}$.

La loi de probabilité est :

Issues	1	2	3	Total
Probabilité	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{10}{10}$

La somme des probabilités est égale à 1 : $p(1) + p(2) + p(3) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{10}{10} = 1$

3 - Probabilité d'un évènement :

Définition : Un **évènement** est constitué de tous les évènements élémentaires qui le caractérisent.
A chaque événement A on associe un nombre appelé **probabilité de A**, **noté p(A)**, **compris entre 0 et 1**, égal à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.

Exemple : pour un dé équilibré à six faces :

$$p(2\,;4) = p(2) + p(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Propriété : La **probabilité** d'un **événement certain** est **égale à 1**.

$$\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$$

Propriété : La **probabilité** d'un **événement impossible** est **égale à 0**.

$$\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$$

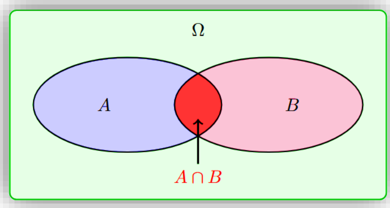
Propriété : Quel que soit l'événement A, on a : **$0 \leq p(A) \leq 1$**.

4 - Propriétés des évènements contraires :

Propriété : Soit A un événement : $\boldsymbol{p(A) + p(\bar{A}) = 1}$ donc $\boldsymbol{p(\bar{A}) = 1 - p(A)}$

Exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Soit A l'évènement : « on obtient un 5 ou un 6 »
On a : $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, donc : $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

5 - Propriété générale des probabilités : Formule de Poincaré :



Propriété : Soit A et B deux événements :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Remarque : Si A et B sont **incompatibles**, alors $A \cap B = \emptyset$, et $P(A \cap B) = 0$
Dans ce cas : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6 - Loi des probabilités totales :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

De même : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$

III] Equiprobabilité :

Définition : Si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont **équiprobables** ou qu'il y a **équiprobabilité**.

Exemple : Si l'on lance un dé équilibré : Ω = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 } et :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

Propriété : Dans une **situation d'équiprobabilité**, la **probabilité d'un événement A** est égale au **quotient** du **nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles**.

cas favorables par le nombre de cas possibles.

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega} = \frac{\mathrm{card}(\mathrm{A})}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

On dit aussi : $P(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre de cas à la réalisation de A}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Exemple : Une roue de casino non truquée est constituée de 40 cases : 18 rouges, 18 noires et 4 vertes. La probabilité d'obtenir un numéro rouge est :

$$p = \frac{\text{nombre de cases noires}}{\text{nombre total de cases}} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

IV] Résolution d'exercices :

1 - Tableau à double entrée :

Un **tableau à double entrée** est un outil très utile pour organiser les issues d'une expérience aléatoire qui combine **deux critères** ou **deux épreuves successives**. Il permet de visualiser toutes les combinaisons possibles et de faciliter le calcul des probabilités, en particulier lorsque les événements sont liés à ces deux critères.

- Les **lignes** représentent les issues possibles du premier critère (ou de la première épreuve).
- Les **colonnes** représentent les issues possibles du deuxième critère (ou de la deuxième épreuve).
- Chaque **case** à l'intersection d'une ligne et d'une colonne correspond à une issue combinée de l'expérience.

Exemple : Un buffet de mariage propose **200 pâtisseries** : des **éclairs** et des **religieuses**, chacune pouvant être **au café** ou **à la vanille**. Le tableau ci-dessous répartit les pâtisseries selon leur type et leur parfum.

	Café	Vanille	Total
Eclairs	40	60	100
Religieuses	50	50	100
Total	90	110	200

1) Un invité choisit **une pâtisserie au hasard.**
Quelle est la probabilité qu'il prenne **une religieuse au café** ?

$$p(\text{religieuse au café}) = \frac{50}{200} = 0{,}25$$

2) Sachant que l'invité a choisi **un éclair**, quelle est la probabilité qu'il soit **à la vanille** ?

$$p(\text{vanille} \mid \text{éclair}) = \frac{60}{100} = 0{,}6$$

2 - Arbre pondérée :

Lorsque l'on répète **plusieurs fois de suite** une même expérience aléatoire, et que les répétitions sont **indépendantes** (le résultat d'une épreuve n'influence pas les suivantes), il est très utile de représenter la situation par un **arbre pondéré**.
Un arbre pondéré permet de visualiser tous les chemins possibles et de calculer facilement les probabilités des événements composés.

Comment construire un arbre pondéré ?

- Chaque nœud (point de départ ou de bifurcation) correspond à une étape de l'expérience.
- De chaque nœud partent des branches qui représentent les issues possibles à cette étape.
- Sur chaque branche, on note la **probabilité** de l'issue correspondante.

Propriété : La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin **est égale au produit des probabilités écrites sur chaque branche de ce chemin.**

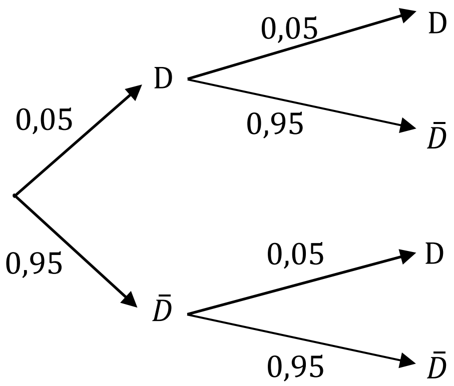
Exemple : Une usine produit des composants électroniques. On sait que **5 %** des composants produits présentent un défaut (événement D). On prélève **successivement et avec remise** deux composants pour les tester.
On note :

- D: « le composant est défectueux »
- $\bar{D}$: « le composant est fonctionnel »

Probabilités :

- $p(D) = 0{,}05$
- $p(\bar{D}) = 0{,}95$

L'arbre pondéré pour deux tirages successifs est le suivant :



1) Quelle est la probabilité que les deux composants soient défectueux.
C'est le chemin (D' D) :

$$p(D, D) = 0{,}05 \times 0{,}05 = 0{,}0025$$

2) Probabilité qu'exactement un des deux composants soit défectueux.
Cela correspond aux chemins (D'$\bar{\text{D}}$) et ($\bar{\text{D}}$' D) :

$$p(1\text{ défectueux}) = (0{,}05 \times 0{,}95) + (0{,}95 \times 0{,}05) = 0{,}0475 + 0{,}0475 = 0{,}095$$