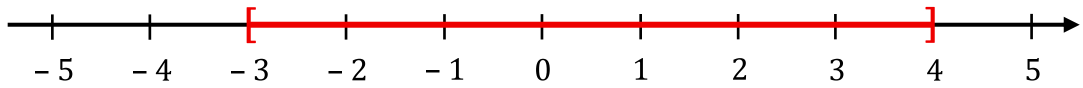
Nombres réels

I] Intervalles de réels :

1 - Définition :

Exemple : L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-3 \leq x \leq 4$ peut se représenter ainsi sur une droite graduée :

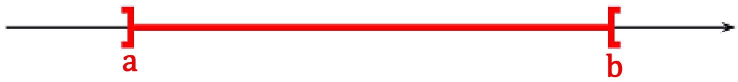


Cet ensemble est appelé un intervalle et se note $[-3 ; 4]$.

Définition : Un **intervalle de $\mathbb{R}$** est un ensemble de réels vérifiant une propriété particulière. Plus précisément :

↳ On dit que **[a ; b] est l'intervalle fermé** de borne inférieure a et de borne supérieure b.
Il désigne l'ensemble des réels vérifiant : $a \leq x \leq b$.
Les deux **bornes a et b sont comprises** dans l'intervalle.

↳ On dit que **]a ; b[est l'intervalle ouvert** de borne inférieure a et de borne supérieure b.
Il désigne l'ensemble des réels vérifiant : $a < x < b$.
Les deux **bornes a et b ne sont pas comprises** dans l'intervalle.



↳ On dit que [a ; b[**est l'intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé)** de borne inférieure a et de borne supérieure b.
Il désigne l'ensemble des nombres x vérifiant : $a \leq x < b$.
La borne **a est comprise**, la borne **b n'est pas comprise**.

↳ On dit que]a ; b] **est l'intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé)** de borne inférieure a et de borne supérieure b.
Il désigne l'ensemble des nombres x vérifiant : $a < x \leq b$.
La borne **a n'est pas comprise**, la borne **b est comprise**.

↳ On dit que $[a ; +\infty[$ **est l'intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé)** de borne inférieure a.
Il désigne l'ensemble des nombres x vérifiant : $x \geq a$.
La borne **a est comprise**.

↳ On dit que $]a ; +\infty[$ **est l'intervalle ouvert** de borne inférieure a.
Il désigne l'ensemble des nombres x vérifiant : $x > a$.
La borne **a n'est pas comprise**.

↬ On dit que $]-\infty ; b]$ **est l'intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé)** de borne supérieure b.
Il désigne l'ensemble des nombres x vérifiant : $x \leq b$.

La borne **b est <u>comprise</u>**.

↬ On dit que $]-\infty ; b[$ **est l'intervalle ouvert** de borne supérieure b.
Il désigne l'ensemble des nombres x vérifiant : $x < b$.

La borne **b <u>n'est pas comprise</u>**.

<u>**Remarque :**</u> **Sens des crochets.**

Quand le crochet est tourné vers <u>**l'intérieur**</u> de l'intervalle, la **borne <u>appartient</u> à l'intervalle.**

Quand le crochet est tourné vers <u>**l'extérieur**</u> de l'intervalle, la **borne <u>n'appartient pas</u> à l'intervalle.**

<u>**Exemple :**</u> On dit que l'intervalle $[2 ; 3[$ est fermé en 2 et ouvert en 3.
$2 \in [2 ; 3[$ mais $3 \notin [2 ; 3[$.

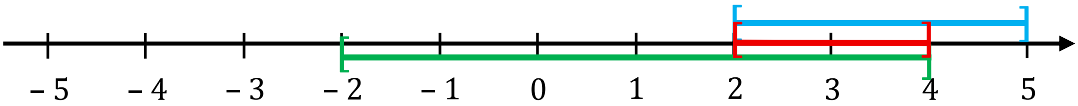
<u>**Vocabulaire :**</u> $+\infty$ se lit « plus l'infini » et $-\infty$ se lit « moins l'infini ».

L'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels est l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$.

<u>2 - Intersection et réunion :</u>

<u>**Définition :**</u> <u>**L'intersection**</u> de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Elle se note $\mathbf{A \cap B}$.

<u>**Exemple :**</u> Soit $I = [-2 ; 4]$ et $J = [2 ; 5]$. Déterminer $I \cap J$.



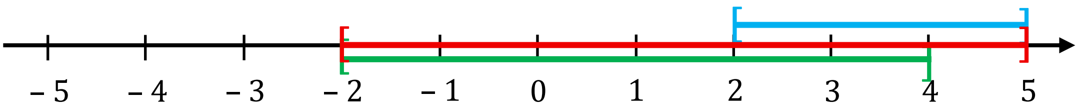
On cherche les nombres x qui sont <u>**repassés en même temps**</u> par les deux intervalles (bleu et vert).

C'est l'ensemble des réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ qui se note : $\mathbf{I \cap J = [2 ; 4]}$

<u>**Comme :**</u> 2 appartient à l'intersection (car $2 \in I$ et $2 \in J$) alors le crochet est tourné vers l'intérieur.
4 appartient à l'intersection (car $4 \in I$ et $4 \in J$) alors le crochet est tourné vers l'intérieur.

<u>**Définition :**</u> <u>**La réunion**</u> de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B, ou aux deux. Elle se note $\mathbf{A \cup B}$.

<u>**Exemple :**</u> Soit $I = [-2 ; 4]$ et $J = [2 ; 5]$. Déterminer $I \cup J$.

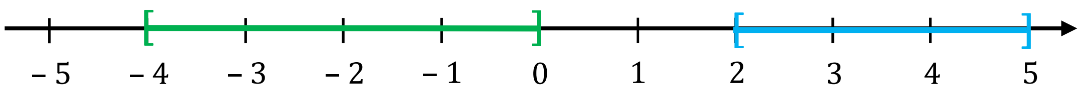


On cherche les nombres x qui sont tous les nombres qui appartiennent **à I et à J, ou aux deux**. C'est à dire les nombres <u>**que l'on a repassé en vert en bleu ou des deux couleurs**</u>.

C'est l'ensemble des réels x tels que $-2 \leq x \leq 5$ qui se note : $\mathbf{I \cup J = [-2 ; 5]}$

<u>**Comme :**</u> -2 appartient à la réunion (car $-2 \in I$) alors le crochet est tourné vers l'intérieur.
5 appartient à la réunion (car $5 \in J$) alors le crochet est tourné vers l'intérieur.

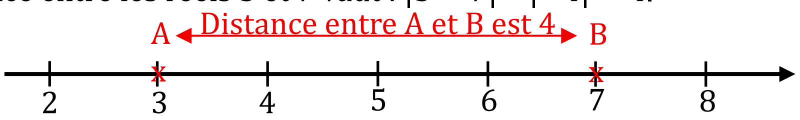
<u>**Remarque :**</u> Si on pose $I = [-4 ; 0]$ et $J = [2 ; 5]$, alors <u>**l'ensemble $I \cap J$ ne contient aucun réel**</u>. On dit qu'il s'agit de l'ensemble vide et on le note $I \cap J = \emptyset$.



II] Valeur absolue :

Définition : Soit A et B deux points d'abscisses respectives a et b sur une droite graduée.
La distance entre les points A et B est le nombre $|a-b|$.
On parle également de distance entre a et b.

Exemple : la distance entre les réels 3 et 7 vaut : $|3-7| = |-4| = 4$.



Remarque : On a donc, pour tous réels aet b, $\mathbf{|\ a-b\ | = |\ b-a\ |}$.

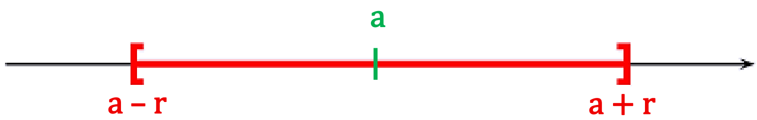
Définition : La **valeur absolue d'un réel x** est la **distance de ce réel à 0** et est **notée | x |**.

Propriété : Pour tout réel x, on a : $|\ x\ | = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Remarque : Ainsi, pour tout réel x, $\mathbf{|\ x\ | \geq 0}$.

Exemples :
$|\ 5\ | = 5$; $|-4\ | = 4$; $|\sqrt{2}+5\ | = \sqrt{2}+5$; $|\sqrt{2}-3\ | = -(\sqrt{2}-3) = 3-\sqrt{2}$; $|\ 0\ | = 0$.

Propriété : Soient a et r deux réels, avec $r \geq 0$.
L'intervalle $[\mathbf{a-r\ ;a+r}]$ est **l'ensemble des réels x tels que $|\ x-a\ | \leq r$**, c'est-à-dire : $\mathbf{a-r \leq x \leq a+r}$.
On dit que cet **intervalle est centré en a**. **a** est le centre de cet intervalle et **r** son rayon.



Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\ x-4\ | = 2$.
Résoudre $|x-4| = 2$, c'est résoudre : $x-4 = 2$ ou $x-4 = -2$
On résout chaque équation séparément :

$x - 4 = 2$	ou	$x-4 = -2$
$x = 2+4$		$x = -2+4$
$x = 6$		$x = 2$

Les solutions de l'équation sont : $S = \{2\ ;6\}$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|\ x+5\ | < 3$.
Résoudre l'inéquation $|x+5| < 3$, c'est résoudre : $-3 < x+5 < 3$.

$$-3 < x+5 < 3$$
$$-3-5 < x+5-5 < 3-5$$
$$-8 < x < -2$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle : $S =]-8\ ;-2[$.