Nombres réels

I] Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$:

1 - Les nombres entiers naturels :

Définition : Un **nombre entier naturel** est un nombre entier qui est positif ou nul.
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ **: 0 ; 1 ; 2 ; ...**

Exemples : $3 \in \mathbb{N}$
$-2 \notin \mathbb{N}$
$7{,}5 \notin \mathbb{N}$

2 - Les nombres entiers relatifs :

Définition : Un **nombre entier relatif** est un nombre entier qui est positif, négatif, ou nul.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ **: ... ; – 3 ; – 2 ; – 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...**

Exemples : $-5 \in \mathbb{Z}$
$8 \in \mathbb{Z}$ (et aussi $8 \in \mathbb{N}$)
$-6{,}5 \notin \mathbb{Z}$

3 - Multiples et diviseurs :

Définitions : Soit a un entier relatif (c'est-à-dire $a \in \mathbb{Z}$) et bun entier naturel (c'est-à-dire $b \in \mathbb{N}$) tel que $b \neq 0$.

- Dire que **a est un multiple de b** signifie qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times b$.
  On dit aussi que **b est un diviseur de a** ou que **a est divisible par b**.

- Un **nombre pair** est un entier pouvant s'écrire sous la forme $2k$, avec $k \in \mathbb{N}$.
  Un nombre pair est donc un nombre divisible par 2.

- Un **nombre impair** est un entier pouvant s'écrire sous la forme $2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.
  Un nombre impair est donc un nombre non divisible par 2.

Exemples :

- 20 est un multiple de 5 car $20 = 5 \times 4$. C'est donc aussi un multiple de 4.

On dit aussi que 5 est un diviseur de 20 ou que 20 est divisible par 5.

- 28 est un nombre pair car $28 = 2 \times 14$.
- $57 = 2 \times 28 + 1$donc 57 est un nombre impair.

Propriétés :

- Le carré d'un nombre pair est pair.
- Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration :

- Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre pair. Alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$.
  Ainsi, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$. Donc n^2 est de la forme $2k'$, avec $k' = 2k^2$ un entier naturel.
  Donc **si n est pair, alors n^2 est pair également.**

- Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre impair. Alors il existe un entier naturel ktel que $n = 2k + 1$.
  Ainsi, $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$.
  Donc n^2 est la forme $2k' + 1$, avec $k' = 2k^2 + 2k$ un entier naturel.
  Donc **si n est impair, alors n^2 est impair également.**

4 - Critères de divisibilité :

Propriétés :

- Un entier naturel est **divisible par 2** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier naturel est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un nombre divisible par 3.
- Un entier naturel est **divisible par 4** si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- Un entier naturel est **divisible par 5** si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un entier naturel est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est un nombre divisible par 9.

Exemples : Vérifier par quels nombres parmi 2, 3, 4, 5 et 9 les entiers naturels suivants sont divisibles : 4 572 et 3 460.

Nombre 4 572

Chiffre des unités : 2
$\Rightarrow$ 4 572 est divisible par 2.

Somme des chiffres : $4 + 5 + 7 + 2 = 18$
$\Rightarrow$ 18 est divisible par 3 et par 9
$\Rightarrow$ 4 572 est divisible par 3 et par 9.

Deux derniers chiffres : 72
$\Rightarrow$ 72 est divisible par 4 (car $72 \div 4 = 18$)
$\Rightarrow$ 4 572 est divisible par 4.

Chiffre des unités : 2
$\Rightarrow$ 4 572 n'est pas divisible par 5.

Donc : 4 572 est divisible par 2, 3, 4 et 9, mais pas par 5.

Nombre 3 460

Chiffre des unités : 0
$\Rightarrow$ 3 460 est divisible par 2 et par 5.

Somme des chiffres : $3 + 4 + 6 + 0 = 13$
$\Rightarrow$ 13 n'est divisible ni par 3 ni par 9
$\Rightarrow$ 3 460 n'est pas divisible par 3 ni par 9.

Deux derniers chiffres : 60
$\Rightarrow$ 60 est divisible par 4 (car $60 \div 4 = 15$)
$\Rightarrow$ 3 460 est divisible par 4.

Donc : 3 460 est divisible par 2, 4 et 5, mais pas par 3 ni par 9.

5 - Nombres premiers :

Définition : Un **nombre premier** est un nombre entier naturel qui a exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple : Liste des nombres premiers inférieurs à 30.
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

Remarque : **1 n'est pas premier** car il n'a qu'un seul diviseur positif : lui-même.

Propriété : Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs.

Exemple : $60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

Définition : On dit que deux entiers relatifs sont **premiers entre eux** si, et seulement si, ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1 (ou – 1).

Exemples :
16 et 5 sont premiers entre eux car les diviseurs de 16 sont 1, 2, 4 et 16, et les diviseurs de 5 sont 1 et 5. Le seul diviseur commun de 16 et 5 est donc bien 1.
12 et 8 ne sont pas premiers entre eux car ils ont au moins 2 comme diviseur commun.

Propriété : Soient a et b deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$.
La fraction $\frac{a}{b}$ est dite **irréductible** si, et seulement si, a et b sont premiers entre eux.

II] Les ensembles $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$:

1 - Les nombres décimaux :

Définition : Un **nombre décimal** est un nombre qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule. L'ensemble des nombres décimaux est **noté $\mathbb{D}$.**

Exemples : $8{,}124 \in D$;
$7 \in D$ (car $7 = 7{,}0$) ;
$\frac{3}{4} \in D$ (car $\frac{3}{4} = 0{,}75$) ;
$\frac{2}{3} \notin D$ (car $\frac{2}{3} \approx 0{,}666...$)

Remarque : Un **nombre décimal** peut toujours s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Exemple : $8{,}124 = \frac{8\,124}{1\,000} = \frac{8\,124}{10^3}$.

Propriété : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Démonstration :
On raisonne par l'absurde : supposons que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$.
Alors il existe un entier relatif a et un entier naturel p tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$.
Alors on aurait $10^p = 3a$. Cette égalité entraîne que 10^p est divisible par 3, ce qui est impossible puisque la somme des chiffres de 10^p est 1 (puisque $10^p = 10\ldots0$).

Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

2 - Les nombres rationnels :

Définition : Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction, c'est-à-dire de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b des entiers relatifs, et $b \neq 0$.
L'ensemble des nombres rationnels est **noté $\mathbb{Q}$.**

Exemples : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$

$\frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$

$-9 \in \mathbb{Q}\ \left(\text{car } -9 = \frac{-9}{1}\right)$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Remarque : Un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction, comme $\sqrt{2}$, est appelé un **nombre irrationnel**.

Propriété : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration : On raisonne de nouveau par l'absurde : supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
Alors il existe deux entiers relatifs a et b premiers entre eux, avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
Ainsi, en élevant cette égalité au carré, on obtient que $2 = \frac{a^2}{b^2}$, soit $a^2 = 2b^2$.
On en déduit alors que a^2 est pair. Donc a est nécessairement pair. En effet, si a était impair, alors a^2 serait impair (propriété démontrée plus haut).
Donc il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$. Ainsi, puisque $a^2 = 2b^2$, alors $(2k)^2 = 2b^2$, donc $4k^2 = 2b^2$, donc $b^2 = 2 \times 2k^2$.
Donc b^2 est pair, et pour la même raison qu'au-dessus, on en déduit que b est pair.
Conclusion, a et b sont tous les deux pairs, c'est-à-dire divisibles tous les deux par 2, ce qui est absurde puisqu'ils sont censés être premiers entre eux !
Ainsi, la supposition de départ était fausse, et donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

III] L'ensemble $\mathbb{R}$:

1 - Les nombres réels :

Définition : Un **nombre réel** est un nombre rationnel ou irrationnel.
L'ensemble des nombres réels est **noté $\mathbb{R}$**.

Exemples : $3 \in \mathbb{R}$

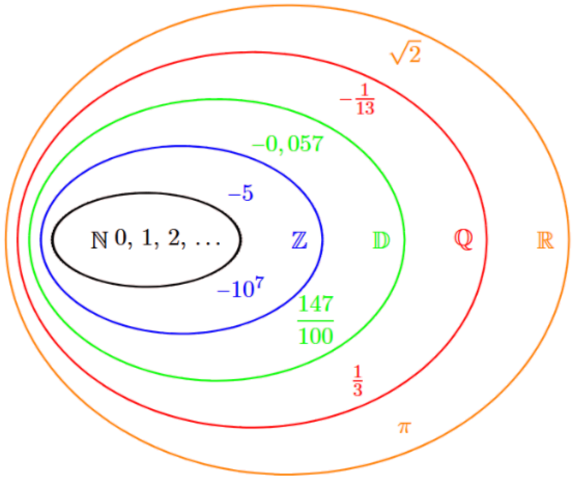
$-2{,}7 \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

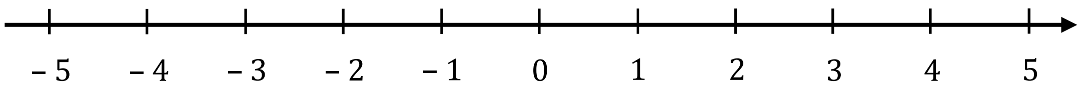
$\pi \in \mathbb{R}$

Propriété : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



2 - Droite numérique :

Propriété : A tout point d'une droite graduée est associé un unique nombre réel appelé son **abscisse**.
Réciproquement, à tout nombre réel est associé un unique point d'une droite graduée.
Cette droite est appelée la **droite numérique**.



3 - Encadrement d'un réel par deux nombres décimaux :

Définition : Tout nombre réel x peut-être encadré par deux nombres décimaux m et M tels que

$$\mathbf{m \leq x \leq M}$$

La différence $\mathbf{M - m}$ est appelée **l'amplitude de l'encadrement**.

Exemple : Déterminer un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 1, puis un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-3}.
Amplitude 1 : On sait que $1^2 = 1 < 2$ et $2^2 = 4 > 2$.
Donc : $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$
Amplitude : $2 - 1 = 1$.

Amplitude $10^{-3} = 0,001$:
On calcule :
$1,414^2 = 1,999396 < 2$
$1,415^2 = 2,002225 > 2$
Donc : $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$
Amplitude : $1,415 - 1,414 = 0,001 = 10^{-3}$.