Variations d'une suite

Exercice n°1 : Pour chaque suite, calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation.

1. $u_n = 3n + 2$
2. $u_n = n^2 - 4n$
3. $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$
4. $u_n = 2^n$
5. $u_n = -5n + 1$

Exercice n°2 : Pour chaque suite, calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire le sens de variation. On suppose que tous les termes sont strictement positifs.

1. $u_n = 3^n$
2. $u_n = \frac{1}{2^n}$
3. $u_n = n$ pour $n \geq 1$
4. $u_n = \frac{5}{n}$ pour $n \geq 1$
5. $u_n = 2n^2$ pour $n \geq 1$

Exercice n°3 : Pour chaque suite définie par récurrence, calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation.

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 3$
2. $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 5$
3. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n$
4. $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
5. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + n$

Exercice n°4 : Pour chaque suite définie par récurrence, calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire le sens de variation. On suppose que tous les termes sont strictement positifs.

1. $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n$
2. $u_1 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{5}$
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n$
4. $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{4}$
5. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$ pour $n \geq 0$

Exercice n°5 : Pour chaque suite définie explicitement, étudier les variations de la fonction associée et en déduire le sens de variation de la suite.

1. $u_n = n^2 - 4n + 1$
2. $u_n = \sqrt{n}$ pour $n \geq 0$
3. $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ pour $n \geq 0$
4. $u_n = 2^{-n}$
5. $u_n = \ln(n + 1)$ pour $n \geq 0$

Exercice n°6 : Pour chaque suite, déterminer le sens de variation en justifiant la méthode utilisée.

1. $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$ pour $n \geq 1$
2. $u_n = 2^n + n^2$
3. $u_n = \frac{n!}{3^n}$ pour $n \geq 1$
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour $n \geq 1$
5. $u_n = \frac{2n}{3^n}$ pour $n \geq 1$

Correction

Exercice n°1 : Pour chaque suite, calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation.

1. $u_n = 3n + 2$

$u_{n+1} - u_n = [3(n+1)+2] - [3n+2] = 3n + 3 + 2 - 3n - 2 = 3 > 0$

La suite est strictement croissante.

2. $u_n = n^2 - 4n$

$u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - 4(n+1)] - [n^2 - 4n] = n^2 + 2n + 1 - \ 4n - 4 = 2n - 3$

$2n - 3 > 0$ pour $n \geq 2$, $2n - 3 < 0$ pour $n \leq 1$.

La suite n'est pas monotone : elle est décroissante pour $n \leq 1$et croissante pour $n \geq 2$.

3. $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1 \times n}{n(n+1)} - \frac{1(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

La suite est strictement décroissante.

4. $u_n = 2^n$

$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n > 0$

La suite est strictement croissante.

5. $u_n = -\,5n + 1$

$u_{n+1} - u_n = (-5(n+1)+1) - (-5n+1) = (-5n - 5 + 1) - (-5n + 1) = \ -5n - 4 + 5n - 1 = -5 < 0$

La suite est strictement décroissante.

Exercice n°2 : Pour chaque suite, calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire le sens de variation. On suppose que tous les termes sont strictement positifs.

1. $u_n = 3^n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3 \times 3^n}{3^n} = 3 > 1$$

La suite est strictement croissante.

2. $u_n = \frac{1}{2^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{1} = \frac{1}{2} < 1$$

La suite est strictement décroissante.

3. $u_n = n$ pour $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} > 1$$

La suite est strictement croissante.

4. $u_n = \frac{5}{n}$ pour $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5}{n+1}}{\frac{5}{n}} = \frac{5}{n+1} \times \frac{n}{5} = \frac{n}{n+1} < 1$$

La suite est strictement décroissante.

5. $u_n = 2n^2$ pour $n \geq 1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)^2}{2n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = (\frac{n+1}{n})^2 = (1 + \frac{1}{n})^2 > 1$

La suite est strictement croissante.

Exercice n°3 : Pour chaque suite définie par récurrence, calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation.

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 3$

$u_{n+1} - u_n = 3 > 0$

La suite est strictement croissante.

2. $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 5$

$u_{n+1} - u_n = -5 < 0$

La suite est strictement décroissante.

3. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n$

$u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_n = u_n$

Comme $u_0 = 4 > 0$, tous les termes sont positifs, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite est strictement croissante.

4. $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} - u_n = -\frac{u_n}{2} < 0$ (car $u_n > 0$)

La suite est strictement décroissante.

5. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + n$

$u_{n+1} - u_n = n$

Pour $n \geq 0$, $n \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite est croissante (au sens large). De plus, pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n > 0$, donc elle est strictement croissante à partir de $n = 1$.

Exercice n°4 : Pour chaque suite définie par récurrence, calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire le sens de variation. On suppose que tous les termes sont strictement positifs.

1. $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$

La suite est strictement croissante.

2. $u_1 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{5}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5} < 1$

La suite est strictement décroissante.

3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 > 1$

La suite est strictement croissante.

4. $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{4}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$

La suite est strictement décroissante

5. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$ pour $n \geq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}$$

Pour $n \geq 0$, $\frac{1}{n+1} \leq 1$.

La suite est décroissante (au sens large). De plus, pour $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, donc elle est strictement décroissante à partir de $n = 1$.

__Exercice n°5 :__ Pour chaque suite définie explicitement, étudier les variations de la fonction associée et en déduire le sens de variation de la suite.

1. $u_n = n^2 - 4n + 1$

- **Fonction associée :** $f(x) = x^2 - 4x + 1$
- **Dérivée :** $f'(x) = 2x - 4$
- **Signe de la dérivée :**
  - $f'(x) < 0$ pour $x < 2$
  - $f'(x) > 0$ pour $x > 2$
- **Variations de f :** Décroissante sur $[0,2]$, croissante sur $[2, +\infty[$
- **Conclusion :** La suite est décroissante pour $n \leq 2$ et croissante pour $n \geq 2$

2. $u_n = \sqrt{n}$ pour $n \geq 0$

- **Fonction associée :** $f(x) = \sqrt{x}$
- **Dérivée :** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- **Signe de la dérivée :** $f'(x) > 0$ pour $x > 0$
- **Variations de f :** Strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- **Conclusion :** La suite est strictement croissante

3. $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ pour $n \geq 0$

- **Fonction associée :** $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
- **Dérivée :** $f'(x) = \frac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
- **Signe de la dérivée :**
  - $f'(x) > 0$ pour $x < 1$
  - $f'(x) < 0$ pour $x > 1$
- **Variations de f :** Croissante sur $[0,1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$
- **Conclusion :** La suite est croissante pour $n \leq 1$ et décroissante pour $n \geq 1$

4. $u_n = 2^{-n}$

- **Fonction associée :** $f(x) = 2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$
- **Dérivée :** $f'(x) = -\ln(2) \cdot 2^{-x}$
- **Signe de la dérivée :** $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- **Variations de f :** Strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- **Conclusion :** La suite est strictement décroissante

5. $u_n = \ln(n+1)$pour $n \geq 0$

- **Fonction associée :** $f(x) = \ln(x+1)$
- **Dérivée :** $f'(x) = \frac{1}{x+1}$
- **Signe de la dérivée :** $f'(x) > 0$ pour $x > -1$
- **Variations de f :** Strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- **Conclusion :** La suite est strictement croissante

Exercice n°6 : Pour chaque suite, déterminer le sens de variation en justifiant la méthode utilisée.

1. $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$ pour $n \geq 1$

Méthode choisie : Fonction associée

Fonction associée : $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

- **Dérivée :** $f'(x) = \frac{3(x+1)-(3x+2)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$
- **Signe de la dérivée :** $f'(x) > 0$pour tout $x > -1$
- **Conclusion :** La fonction $f$est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, donc la suite est **strictement croissante.**

2. $u_n = 2^n + n^2$

Méthode choisie : Différence $u_{n+1} - u_n$

- **Calcul :** $u_{n+1} - u_n = (2^{n+1} + (n+1)^2) - (2^n + n^2) = 2^n + 2n + 1$
- **Analyse :** $2^n + 2n + 1 > 0$ pour tout $n \geq 0$
- **Conclusion :** La suite est **strictement croissante.**

3. $u_n = \frac{n!}{3^n}$ pour $n \geq 1$

Méthode choisie : Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

- **Calcul :** $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{n+1}{3}$
- **Analyse :**
  - $\frac{n+1}{3} < 1$pour $n < 2$
  - $\frac{n+1}{3} = 1$pour $n = 2$
  - $\frac{n+1}{3} > 1$pour $n > 2$
- **Conclusion :** La suite est **décroissante** pour $n \leq 2$, puis **croissante** pour $n \geq 2$. Elle n'est pas monotone sur tout $\mathbb{N}$.

4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour $n \geq 1$

Calcul :

$$u_{n+1} - u_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

On utilise la formule :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Pour $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$:

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

Pour $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 0$$

car $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

Conclusion : La suite est **strictement décroissante**.

5. $u_n = \frac{2n}{3^n}$ pour $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{2n}{3^n}} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n}$$

Pour $n = 1$: $\frac{2}{3} < 1$

Pour $n \geq 2$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} < 1$

Conclusion : La suite est **strictement décroissante**