Feuilles d'exercices : Somme des termes d'une suite arithmétique et géométrique

Exercice n°1 : Calculer les sommes suivantes.
a) $S = 1 + 2 + 3 + ... + 20$
b) $S = 5 + 6 + 7 + ... + 25$
c) $S = 12 + 13 + ... + 40$
d) $S = 30 + 31 + ... + 80$

Exercice n°2 : On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 4 et de premier terme $u_0 = -3$.
Calculer la somme des 15 premiers termes de la suite.

Exercice n°3 : On considère la suite arithmétique (v_n) de raison – 5 et de premier terme $v_0 = 12$.
Calculer la somme des 22 premiers termes de la suite.

Exercice n°4 : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 7$.
Calculer la somme
$S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{18}$.

Exercice n°5 : Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $q = -2$.
1) Calculer la somme des 12 premiers termes.
2) Calculer la somme des 5 premiers termes.
3) En déduire la valeur de $v_5 + v_6 + ... + v_{11}$.

Exercice n°6 : Calculer la somme des 40 premiers entiers naturels impairs.

Exercice n°7 : Calculer les sommes suivantes.
a) $S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{10}$
b) $S = 3 - 6 + 12 - 24 + ... - 768 + 1536$

Exercice n°8 : Calculer les sommes suivantes.
Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-6} près.
a) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{12}}$
b) $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{10}}$
c) $S = \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{16}} + ... + \frac{1}{2^{25}}$

Exercice n°9 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 = 16$.
Calculer la somme des 12 premiers termes de la suite (u_n).

Exercice n°10 : Soit (v_n) une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $v_0 = 5$.
Calculer la somme des 8 premiers termes de la suite (v_n) .

Correction

Exercice n°1 : Calculer les sommes suivantes.

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

où

- a_1 = premier terme
- a_n = dernier terme
- n = nombre de termes

a) $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 20$

- $a_1 = 1$
- $a_n = 20$
- $n = 20$

$$S = \frac{20(1+20)}{2} = 10 \times 21 = 210$$

b) $S = 5 + 6 + 7 + \dots + 25$

- $a_1 = 5$
- $a_n = 25$
- $n = 25 - 5 + 1 = 21$

$$S = \frac{21(5+25)}{2} = \frac{21 \times 30}{2} = 21 \times 15 = 315$$

c) $S = 12 + 13 + \dots + 40$

- $a_1 = 12$
- $a_n = 40$
- $n = 40 - 12 + 1 = 29$

$$S = \frac{29(12+40)}{2} = \frac{29 \times 52}{2} = 29 \times 26 = 754$$

d) $S = 30 + 31 + \dots + 80$

- $a_1 = 30$
- $a_n = 80$
- $n = 80 - 30 + 1 = 51$

$$S = \frac{51(30+80)}{2} = \frac{51 \times 110}{2} = 51 \times 55 = 2\,805$$

Exercice n°2 : On considère la suite arithmétique (u_n) de raison 4 et de premier terme $u_0 = -3$.
Calculer la somme des 15 premiers termes de la suite.

On a : $u_0 = -3$ et $r = 4$
Le n$^{\text{ième}}$ terme : $u_n = u_0 + nr = -3 + 4n$
On cherche S_{15}, somme des termes de u_0 à u_{14}.
Il y a 15 termes.
Calcul du dernier terme : $u_{14} = -3 + 4 \times 14 = -3 + 56 = 53$

Somme : $S_{15} = \frac{15(u_0 + u_{14})}{2} = \frac{15(-3+53)}{2} = \frac{15 \times 50}{2} = 15 \times 25 = 375$

<u>Exercice n°3 :</u> On considère la suite arithmétique (v_n) de raison – 5 et de premier terme $v_0 = 12$.
Calculer la somme des 22 premiers termes de la suite.
On a : $v_0 = 12$ et $r = -5$
Le $n^{\text{ième}}$ terme : $u_n = u_0 + nr = 12 - 5n$
On cherche S_{22}, somme des termes de v_0 à u_{21}.
Il y a 22 termes.
Calcul du dernier terme : $v_{21} = 12 - 5 \times 14 = 12 - 105 = -93$

<u>Somme :</u> $S_{22} = \frac{22(v_0 + v_{21})}{2} = \frac{22(12 - 93)}{2} = \frac{22 \times (-81)}{2} = 11 \times (-81) = -891$

<u>Exercice n°4 :</u> Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 7$.
Calculer la somme
$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{18}$.
Suite arithmétique : $u_n = u_0 + nr = -5 + 7n$

Dernier terme : $u_{18} = -5 + 7 \times 18 = -5 + 126 = 121$

Nombre de termes : $n = 19$

Somme : $S = \frac{19(-5 + 121)}{2} = \frac{19 \times 116}{2} = 19 \times 58 = 1\,102$

<u>Exercice n°5 :</u> Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $q = -2$.
1) Calculer la somme des 12 premiers termes.
Suite géométrique de premier terme $a = 4$ et raison $q = -2$.
Nombre de termes : $n = 12$.
$$S_{12} = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = 4\frac{1 - (-2)^{12}}{1 - (-2)} = 4\frac{1 - 4\,096}{3} = 4\frac{-4\,095}{3} = -5\,460$$

2) Calculer la somme des 5 premiers termes.
$$S_{15} = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = 4\frac{1 - (-2)^5}{1 - (-2)} = 4\frac{1 - (-32)}{3} = 4\frac{33}{3} = 44$$

3) En déduire la valeur de $v_5 + v_6 + \dots + v_{11}$.
$v_5 + \dots + v_{11} = S_{12} - S_5 = -5\,460 - 44 = -5\,504$

<u>Exercice n°6 :</u> Calculer la somme des 40 premiers entiers naturels impairs.
Les 40 premiers impairs sont : 1, 3, 5 , … , 79
- $a_1 = 1$
- $a_n = 79$
- $n = 40$

$$S = \frac{40(1 + 79)}{2} = 20 \times 80 = 1\,600$$

<u>Exercice n°7 :</u> Calculer les sommes suivantes.
a) $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$
Termes : $2^1, 2^2, \dots, 2^{10}$
- premier terme $a = 2$
- raison $q = 2$
- nombre de termes $n = 10$

$S = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 2\dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2(1024 - 1) = 2 \times 1\,023 = 2\,046$

b) $S = 3 - 6 + 12 - 24 + \ldots - 768 + 1536$

Termes : 3, – 6, 12, – 24, …

- premier terme a = 3
- raison q = – 2

La suite va de 3 à 1 536.

On cherche le nombre de termes.

Trouver n tel que : $3(-2)^{n-1} = 1536$

$(-2)^{n-1} = 512$

Comme $512 = 2^9$ et est positif, il faut un exposant pair : $n - 1 = 9 \Rightarrow n = 10$

$S = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 3\dfrac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = 3\dfrac{1024 - 1}{-3} = 3\dfrac{1\,023}{-3} = -1\,023$

Exercice n°8 : Calculer les sommes suivantes.

Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-6} près.

a) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{12}}$

Suite géométrique de premier terme a = 1 et raison $q = \frac{1}{2}$

$S = a\dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 1\dfrac{1 - (\frac{1}{2})^{13}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \dfrac{1}{8\,192}) = 2 - \dfrac{2}{8\,192} = 2 - \dfrac{1}{4\,096} = \dfrac{8\,191}{4\,096} \approx 1{,}999756$

b) $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{10}}$

Suite géométrique

- premier terme $a = \frac{1}{3}$
- raison $q = \frac{1}{3}$
- nombre de termes n = 10

$$S = \dfrac{\frac{1}{3}(1 - (\frac{1}{3})^{10})}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{3^{10}}) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{118\,098} \approx 0{,}499\,992$$

c) $S = \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{16}} + \ldots + \frac{1}{2^{25}}$

Suite géométrique

- premier terme $a = \frac{1}{2^{15}}$
- raison $q = \frac{1}{2}$
- nombre de termes $n = \frac{1}{2^{25}}$

Nombre de termes : n = 25 – 15 + 1 = 11

$$S = \frac{1}{2^{15}} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{14}}(1 - \frac{1}{2^{11}}) = \frac{1}{16384} - \frac{1}{3355432} \approx 0{,}000\ 061$$

Exercice n°9 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 = 16$.
Calculer la somme des 12 premiers termes de la suite (u_n).
Une suite géométrique de premier terme $u_0 = 16$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.
On cherche la somme : $S_{12} = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{11}$.
Formule de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique :

$$S_{12} = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 16 \frac{1 - (\frac{3}{4})^{12}}{1 - \frac{3}{4}} = 16 \frac{1 - (\frac{3}{4})^{12}}{\frac{1}{4}} = 16 \times 4\ (1 - (\frac{3}{4})^{12} = 64(1 - (\frac{3}{4})^{12}$$

On calcule la puissance : $(\frac{3}{4})^{12} = \frac{3^{12}}{4^{12}} = \frac{531\ 441}{16\ 777\ 216} \approx 0{,}03167$
Donc : $S_{12} \approx 64(1 - 0{,}031\ 67) = 64 \times 0{,}968\ 33 \approx 61{,}973$

Résultat : $64(1 - (\frac{3}{4})^{12} \approx 61{,}973$

Exercice n°10 : Soit (v_n) une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $v_0 = 5$.
Calculer la somme des 8 premiers termes de la suite (v_n) .
Suite géométrique :

- premier terme : $v_0 = 5$
- raison : $q = -3$

On cherche : $S_8 = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_7$
Formule : $S_8 = v_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 5 \frac{1 - (-3)^8}{1 - (-3)} = 5 \frac{1 - 6\ 561}{4} = 5 \frac{-6560}{4} = -8\ 200$