Signe d'une expression avec des exponentielles

Exercice n°1 : Étudier le signe des expressions suivantes pour $x \in \mathbb{R}$.

1. e^{x^2+3x}
2. $-5e^{x-4}$
3. $e^{2x-1} - 1$
4. $e^{-x+5} - e^2$
5. $e^{3x} - e^{x+4}$
6. $e^3 - e^{4x}$

Exercice n°2 : Étudier le signe des expressions suivantes pour $x \in \mathbb{R}$.

1. $e^{4x-2} + 1$
2. $3e^5 - 3e^{-2x+3}$
3. $2 - 2e^{-3x+2}$

Exercice n°3 : Étudier le signe des expressions suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{-x} + 2$
2. $-2xe^{3x}$
3. $e^{5x-1} - 1$

Exercice n°4 : Étudier le signe des expressions suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^x(3x - 6)$
2. $xe^{2x} - x$
3. $5x + 5e^3 - x$

Exercice n°5 : À l'aide d'une étude de signe, résoudre dans $\mathbb{R}$les inéquations suivantes.

1. $2x < 2xe^{x+2}$
2. $(x^2 + 2x - 8)e^x > 0$
3. $e^{2x}(2 - e^x) \leq 0$

Exercice n°6 : À l'aide d'une étude de signe, résoudre dans $\mathbb{R}$les inéquations suivantes.

1. $4xe^x > x^3e^x$
2. $x - xe^{4-x} \geq 0$
3. $e^{3x} - e^x < 0$

Signe d'une expression avec des exponentielles

Exercice n°1 : Étudier le signe des expressions suivantes pour $x \in \mathbb{R}$.

1. e^{x^2+3x}

L'exponentielle est toujours strictement positive, donc $e^{x^2+3x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
e^{x^2+3x}	$+$	

2. $-5e^{x-4}$

Comme $e^{x-4} > 0$, alors $-5e^{x-4} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-5e^{x-4}$	$-$	

3. $e^{2x-1} - 1$

On a $e^{2x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} \geq 1 \Leftrightarrow e^{2x-1} \geq e^0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Donc $e^{2x-1} - 1 > 0$ pour $x > \frac{1}{2}$, nul pour $x = \frac{1}{2}$, et négatif pour $x < \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$e^{2x-1} - 1$		$-$	0	$+$	

4. $e^{-x+5} - e^2$

On a $e^{-x+5} - e^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x+5} \geq e^2 \Leftrightarrow -x + 5 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Donc $e^{-x+5} - e^2 > 0$ pour $x < 3$, nul pour $x = 3$, et négatif pour $x > 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$e^{-x+5} - e^2$		$+$	0	$-$	

5. $e^{3x} - e^{x+4}$

On factorise : $e^{3x} - e^{x+4} = e^x(e^{2x} - e^4)$. Comme $e^x > 0$, le signe est celui de $e^{2x} - e^4$.

$e^{2x} - e^4 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq e^4 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Donc $e^{3x} - e^{x+4} > 0$ pour $x > 2$, nul pour $x = 2$, et négatif pour $x < 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^{3x} - e^{x+4}$		$-$	0	$+$	

6. $e^3 - e^{4x}$

On a $e^3 - e^{4x} \geq 0 \Leftrightarrow e^3 \geq e^{4x} \Leftrightarrow 3 \geq 4x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}$.

Donc $e^3 - e^{4x} > 0$ pour $x < \frac{3}{4}$, nul pour $x = \frac{3}{4}$, et négatif pour $x > \frac{3}{4}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$e^3 - e^{4x}$		$+$	0	$-$	

Exercice n°2 : Étudier le signe des expressions suivantes pour $x \in \mathbb{R}$.

1. $e^{4x-2} + 1$

Comme $e^{4x-2} > 0$, alors $e^{4x-2} + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$e^{4x-2} + 1$	$+$	

2. $3e^5 - 3e^{-2x+3}$

Le signe est celui de $e^5 - e^{-2x+3}$.

$e^5 - e^{-2x+3} \geq 0 \Leftrightarrow e^5 \geq e^{-2x+3} \Leftrightarrow 5 \geq -2x+3 \Leftrightarrow 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Donc l'expression est positive pour $x > -1$, nulle pour $x = -1$, et négative pour $x < -1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$3e^5 - 3e^{-2x+3}$		-	0	+	

3. $2 - 2e^{-3x+2}$

Le signe est celui de $1 - e^{-3x+2}$.

$1 - e^{-3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-3x+2} \Leftrightarrow 0 \geq -3x+2 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

Donc l'expression est positive pour $x > \frac{2}{3}$, nulle pour $x = \frac{2}{3}$, et négative pour $x < \frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2 - 2e^{-3x+2}$		-	0	+	

<u>**Exercice n°3 :**</u> Étudier le signe des expressions suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{-x} + 2$

Comme $e^{-x} > 0$, alors $e^{-x} + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$e^{-x} + 2$		+	

2. $-2xe^{3x}$

Comme $e^{3x} > 0$, le signe est celui de $-2x$, donc le signe est opposé à celui de x.

Ainsi, l'expression est positive pour $x < 0$, nulle pour $x = 0$, et négative pour $x > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2xe^{3x}$		+	0	-	

3. $e^{5x-1} - 1$

On a $e^{5x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{5x-1} \geq 1 \Leftrightarrow 5x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$.

Donc l'expression est positive pour $x > \frac{1}{5}$, nulle pour $x = \frac{1}{5}$, et négative pour $x < \frac{1}{5}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$e^{5x-1} - 1$		-	0	+	

<u>**Exercice n°4 :**</u> Étudier le signe des expressions suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^x(3x - 6)$

Comme $e^x > 0$, le signe est celui de $3x - 6$.

$3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Donc l'expression est positive pour $x > 2$, nulle pour $x = 2$, et négative pour $x < 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^x(3x - 6)$		-	0	+	

2. $xe^{2x} - x$

On étudie le signe du produit.

$e^{2x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Donc $e^{2x} - 1$ est positif pour $x > 0$, nul pour $x = 0$, négatif pour $x < 0$.
On fait un tableau de signes :

↳ Pour $x < 0$: $x < 0$, $e^{2x} - 1 < 0$, donc produit positif (car négatif × négatif).

↳ Pour $x = 0$: l'expression est nulle.

↳ Pour $x > 0$: $x > 0$, $e^{2x} - 1 > 0$, donc produit positif.
Ainsi, $xe^{2x} - x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et nul seulement en $x = 0$.
(En fait, on peut factoriser : $x(e^{2x} - 1)$. Pour $x < 0$, les deux facteurs sont négatifs donc produit positif, etc.)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{2x} - 1$		$-$	0	$+$	
$x(e^{2x} - 1)$		$+$	0	$+$	

3. $5x + 5e^3 - x$

C'est une fonction affine.

$4x + 5e^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5e^3}{4}$.

Donc l'expression est positive pour $x > -\frac{5e^3}{4}$, nulle pour $x = -\frac{5e^3}{4}$, et négative pour $x < -\frac{5e^3}{4}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5e^3}{4}$		$+\infty$
$4x + 5e^3$		$-$	0	$+$	

<u>Exercice n°5 :</u> À l'aide d'une étude de signe, résoudre dans $\mathbb{R}$les inéquations suivantes.

1. $2x < 2xe^{x+2}$

On peut diviser par 2 (strictement positif) : $x < xe^{x+2}$.
Il faut étudier le signe de $xe^{x+2} - x = x(e^{x+2} - 1)$.
On veut $x(e^{x+2} - 1) > 0$.
Étude de $e^{x+2} - 1$: $e^{x+2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.
Tableau de signes de $x(e^{x+2} - 1)$:

↳ Si $x < -2$: $x < 0$, $e^{x+2} - 1 < 0$, donc produit positif .

↳ Si $-2 < x < 0$: $x < 0$, $e^{x+2} - 1 > 0$, donc produit négatif.

↳ Si $x > 0$: $x > 0$, $e^{x+2} - 1 > 0$, donc produit positif.
En $x = -2$ et $x = 0$, l'expression est nulle.
Donc l'inégalité stricte est vérifiée pour $x < -2$ ou $x > 0$.
Solution: $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$2x$			$-$		0	$+$	
$e^{x+2} - 1$		$+$	0		$-$		
$2xe^{x+2} - 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $(x^2 + 2x - 8)e^x > 0$

Comme $e^x > 0$, cela équivaut à $x^2 + 2x - 8 > 0$.
Les racines du trinôme sont : $\Delta = 4 + 32 = 36$, donc $x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4$, $x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$.
Le trinôme est positif à l'extérieur des racines.
Solution: $x \in]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$(x^2+2x-8)e^x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $e^{2x}(2-e^x) \leq 0$

Comme $e^{2x} > 0$, cela équivaut à $2-e^x \leq 0$, soit $e^x \geq 2$, donc $x \geq \ln\ 2$.
Solution: $x \in [\ln\ 2, +\infty[$.

x	$-\infty$		$\ln\ 2$		$+\infty$
$2-e^x$		$+$	0	$-$	
$e^{2x}(2-e^x)$		$+$	0	$-$	

<u>**Exercice n°6 :**</u> À l'aide d'une étude de signe, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $4xe^x > x^3e^x$

Comme $e^x > 0$, on peut diviser par e^x: $4x > x^3$, soit $x^3 - 4x < 0$.
Factorisons: $x(x^2-4) = x(x-2)(x+2) < 0$.
Étude du signe du produit:

- Pour $x < -2$: les trois facteurs sont négatifs, donc produit négatif.
- Pour $-2 < x < 0$: $x < 0$, $x-2 < 0$, $x+2 > 0$, donc produit positif.
- Pour $0 < x < 2$: $x > 0$, $x-2 < 0$, $x+2 > 0$, donc produit négatif.
- Pour $x > 2$: tous positifs, donc produit positif.

On veut strictement négatif.
Solution: $x \in]-\infty, -2[\cup]0,2[$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x-2)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. $x - xe^{4-x} \geq 0$

Factorisons: $x(1-e^{4-x}) \geq 0$.
Étude de $1-e^{4-x}$: $1-e^{4-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{4-x} \Leftrightarrow 0 \geq 4-x \Leftrightarrow x \geq 4$.
Donc $1-e^{4-x}$est positif pour $x > 4$, nul pour $x = 4$, négatif pour $x < 4$.
Tableau de signes de $x(1-e^{4-x})$:

- Pour $x < 0$: $x < 0$, $1-e^{4-x} < 0$, donc produit positif.
- Pour $0 < x < 4$: $x > 0$, $1-e^{4-x} < 0$, donc produit négatif.
- Pour $x > 4$: $x > 0$, $1-e^{4-x} > 0$, donc produit positif.

En $x = 0$et $x = 4$, l'expression est nulle.
On veut ≥ 0, donc solution: $x \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$.
(Attention: en $x = 0$ et $x = 4$, c'est égal à 0, donc inclus.)

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-e^{4-x})$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(1-e^{4-x})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $e^{3x} - e^{x} < 0$

On factorise: $e^{x}(e^{2x} - 1) < 0$.

Comme $e^{x} > 0$, cela équivaut à $e^{2x} - 1 < 0$, soit $e^{2x} < 1$, donc $2x < 0$, soit $x < 0$.

Solution: $x \in] - \infty, 0[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{2x} - 1$		$-$	0	$+$	
$e^{x}(e^{2x} - 1)$		$-$	0	$+$	