Propriétés de la fonction sinus et cosinus

Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(2x)\cos^2(2x).$$

1. Montrer que f est impaire. Interpréter graphiquement.
2. Montrer que f est π-périodique.

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}(3\cos(x) - \cos(3x)).$$

1. Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.
2. À l'aide de la courbe, conjecturer la parité et la périodicité de f.
3. Calculer $f(-x)$ et en déduire la parité de f.
4. Montrer que f est périodique et préciser sa période.

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(x) - \sin(x).$$

1. Montrer que f n'est ni paire ni impaire.
2. Montrer que f est 2π-périodique. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que, pour tout réel x, $-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$

.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - \sin(4x).$$

1. Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.
2. Montrer que f est $\frac{\pi}{2}$-périodique. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que, pour tout réel x, $1 \leq f(x) \leq 3$.

Exercice n°5 :

1. Soit h une fonction paire. Pour tout réel x, calculer $h(x) - h(-x)$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x^4 + 5\cos(2x)$ est paire.

Exercice n°6 :

1. Soit k une fonction impaire. Pour tout réel x, calculer $k(x) + k(-x)$.
2. En déduire que la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2x^3 + \sin(5x)$ est impaire.

Exercice n°7 :

Dans chaque cas, vérifier que la fonction f est T-périodique.

a) $f : x \mapsto \sin(4\pi x), T = \frac{1}{2}$

b) $f : x \mapsto \cos(\frac{x}{2}), T = 4\pi$

c) $f : x \mapsto \frac{1}{3}\sin(6x - \frac{\pi}{3}), T = \frac{\pi}{3}$

d) $f : x \mapsto 5\cos(\frac{3x+1}{4}), T = \frac{8\pi}{3}$

Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(2x)\cos^2(2x).$$

1. Montrer que f est impaire. Interpréter graphiquement.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \sin(-2x)\cos^2(-2x) = -\sin(2x)\cos^2(2x) = -f(x).$$

Donc f est impaire. Graphiquement, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

2. Montrer que f est π-périodique.

On sait que $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ sont π-périodiques (car $\sin(2(x+\pi)) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x)$, et de même pour cos). Donc $f(x+\pi) = f(x)$. La période est π.

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}(3\cos(x) - \cos(3x)).$$

1. Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.
2. À l'aide de la courbe, conjecturer la parité et la périodicité de f.

La courbe semble paire et périodique de période 2π.

3. Calculer $f(-x)$ et en déduire la parité de f.

On calcule :

$$f(-x) = \frac{1}{4}(3\cos(-x) - \cos(-3x)) = \frac{1}{4}(3\cos(x) - \cos(3x)) = f(x).$$

Donc f est paire.

4. Montrer que f est périodique et préciser sa période.

Les fonctions $\cos(x)$ et $\cos(3x)$ sont 2π-périodiques. Donc f est 2π-périodique.

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(x) - \sin(x).$$

1. Montrer que f n'est ni paire ni impaire.

$f(-x) = \cos(-x) - \sin(-x) = \cos(x) + \sin(x)$.
On a $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.
Donc f n'est ni paire ni impaire.

2. Montrer que f est 2π-périodique. Interpréter graphiquement.

$\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont 2π-périodiques, donc f aussi. Graphiquement, la courbe se répète tous les 2π.

3. Montrer que, pour tout réel x, $-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$.

On peut écrire $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (en factorisant par $\sqrt{2}$). Comme $-1 \leq \cos(\dots) \leq 1$, on a $-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - \sin(4x).$$

1. Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.

2. Montrer que f est $\frac{\pi}{2}$-périodique. Interpréter graphiquement.

$\sin(4x)$ est $\frac{\pi}{2}$-périodique (car $\sin(4(x+\frac{\pi}{2})) = \sin(4x+2\pi) = \sin(4x)$). Donc f aussi.
Graphiquement, la courbe se répète tous les $\frac{\pi}{2}$.

3. Montrer que, pour tout réel x, $1 \leq f(x) \leq 3$.

Comme $-1 \leq \sin(4x) \leq 1$, on a $-1 \leq -\sin(4x) \leq 1$, donc $2-1 \leq f(x) \leq 2+1$, soit $1 \leq f(x) \leq 3$.

Exercice n°5 :

1. Soit h une fonction paire. Pour tout réel x, calculer $h(x) - h(-x)$.

   Si h est paire, alors pour tout réel x, $h(-x) = h(x)$.
   Donc
   $$h(x) - h(-x) = h(x) - h(x) = 0.$$

2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x^4 + 5\cos(2x)$ est paire.

   On considère $h(x) = 3x^4 + 5\cos(2x)$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$h(-x) = 3(-x)^4 + 5\cos(2(-x)) = 3x^4 + 5\cos(-2x).$$

Comme la fonction cosinus est paire, $\cos(-2x) = \cos(2x)$, donc :
$$h(-x) = 3x^4 + 5\cos(2x) = h(x).$$

Ainsi h est paire.

Exercice n°6 :

1. Soit k une fonction impaire. Pour tout réel x, calculer $k(x) + k(-x)$.

   Si k est impaire, alors pour tout réel x, $k(-x) = -k(x)$.
   Donc
   $$k(x) + k(-x) = k(x) + (-k(x)) = 0.$$

2. En déduire que la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2x^3 + \sin(5x)$ est impaire.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$k(-x) = 2(-x)^3 + \sin(5(-x)) = -2x^3 + \sin(-5x).$$

Comme la fonction sinus est impaire, $\sin(-5x) = -\sin(5x)$, donc :
$$k(-x) = -2x^3 - \sin(5x) = -(2x^3 + \sin(5x)) = -k(x).$$

Ainsi k est impaire.

Exercice n°7 :

Dans chaque cas, vérifier que la fonction f est T-périodique.

1. $f: x \mapsto \sin(4\pi x)$, $T = \frac{1}{2}$

Or $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$, donc $f(x+\frac{1}{2}) = \sin(4\pi x) = f(x)$. Vérifié.

2. $f: x \mapsto \cos(\frac{x}{2})$, $T = 4\pi$

Comme $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\ \theta$, on a : $f(x + 4\pi) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$. Vérifié.

3. $f : x \mapsto \frac{1}{3}\sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right), T = \frac{\pi}{3}$

Or $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, mais plus simplement, $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\ \theta$, donc : $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$. Vérifié.

4. $f : x \mapsto 5\cos\left(\frac{3x+1}{4}\right), T = \frac{8\pi}{3}$

Or $\frac{8\pi}{4} = 2\pi$, donc : $f\left(x + \frac{8\pi}{3}\right) = 5\cos\left(\frac{3x+1}{4} + 2\pi\right) = 5\cos\left(\frac{3x+1}{4}\right) = f(x)$. Vérifié.