Étude de variations avec la fonction exponentielle

Exercice n°1 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une expression de la dérivée puis étudier les variations sur $\mathbb{R}$.

1. $f: x \mapsto e^{2x}$
2. $g: x \mapsto 3e^{-x+2}$
3. $h: x \mapsto -2e^{3x-1}$

Exercice n°2 : Étudier les variations des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f: x \mapsto e^{x} - 2x$
2. $g: x \mapsto e^{-x} + x$
3. $h: x \mapsto e^{3x} - 3x + 2$

Exercice n°3 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{x}}{x+1}$
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3}{e^{x}+2}$
3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{2e^{x}}{e^{x}+4}$
4. k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $k(x) = \frac{e^{2x}}{x+3}$

Exercice n°4 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x}$
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x}$
3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2e^{-x}$
4. k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2xe^{3x}$

Exercice n°5 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-2x+1} - 5$
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)e^{-x}$
3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{5x}{e^{2x}}$
4. k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \frac{4}{e^{-x}}$

Exercice n°6 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x-1)e^{-x+2}$
3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^{x} - 4x + 1$
4. k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = -e^{x} + 2x - 3$

Étude de variations avec la fonction exponentielle

Correction

Exercice n°1 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une expression de la dérivée puis étudier les variations sur $\mathbb{R}$.

1. $f: x \mapsto e^{2x}$

Dérivée : $f'(x) = 2e^{2x}$ (dérivée de e^u avec $u = 2x, u' = 2$).
Comme $e^{2x} > 0$ pour tout x, on a $f'(x) > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. $g: x \mapsto 3e^{-x+2}$

Dérivée : $g'(x) = 3 \times (-1)e^{-x+2} = -3e^{-x+2}$ (dérivée de e^uavec $u = -x + 2, u' = -1$).
Comme $e^{-x+2} > 0, g'(x) < 0$.
Donc gest strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

3. $h: x \mapsto -2e^{3x-1}$

Dérivée : $h'(x) = -2 \times 3e^{3x-1} = -6e^{3x-1}$.
$e^{3x-1} > 0$, donc $h'(x) < 0$.
Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Exercice n°2 : Étudier les variations des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f: x \mapsto e^x - 2x$

Dérivée : $f'(x) = e^x - 2$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

Signe de $f'(x)$:
Si $x < \ln 2$, $e^x < 2$ donc $f'(x) < 0$.
Si $x > \ln 2$, $e^x > 2$ donc $f'(x) > 0$.

Variations :
f est décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$, croissante sur $[\ln 2, +\infty[$.
Minimum en $x = \ln 2$, $f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2 - 2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $g: x \mapsto e^{-x} + x$

Dérivée : $g'(x) = -e^{-x} + 1$.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Signe :
Si $x < 0$, $-x > 0$ donc $e^{-x} > 1$, alors $-e^{-x} < -1$ et $g'(x) < 0$.
Si $x > 0$, $e^{-x} < 1$ donc $-e^{-x} > -1$, et comme on ajoute 1, $g'(x) > 0$.

Variations :
g est décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$.
Minimum en $x = 0$, $g(0) = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. $h: x \mapsto e^{3x} - 3x + 2$

Dérivée : $h'(x) = 3e^{3x} - 3 = 3(e^{3x} - 1)$.
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{3x} = 1 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Signe :
Si $x < 0$, $e^{3x} < 1$ donc $h'(x) < 0$.
Si $x > 0$, $e^{3x} > 1$ donc $h'(x) > 0$.

Variations :
h est décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$.
Minimum en $x = 0$, $h(0) = 1 - 0 + 2 = 3$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice n°3 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ **(définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$)**

Dérivée : $f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{e^x \times x}{(x+1)^2}$

Signe de $f'(x)$: $e^x > 0$, $(x+1)^2 > 0$ (sauf en $x = -1$), donc le signe est celui de x.

Variations :
Si $x < 0$(et $x \neq -1$), $f'(x) < 0$, donc fest décroissante sur $]-\infty, -1[$et $]-1{,}0]$.
Si $x > 0$, $f'(x) > 0$, donc fest croissante sur $[0, +\infty[$.
Minimum en $x = 0$, $f(0) = 1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3}{e^x+2}$

Dérivée : $g'(x) = 3 \times \frac{-e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x+2)^2}$

Signe de $g'(x)$: $e^x > 0$, $(e^x+2)^2 > 0$, donc $g'(x) < 0$.

Variations : g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{3}{2}$	↘	0

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{2e^x}{e^x+4}$

Dérivée : $h'(x) = \frac{2 \times e^x(e^x+4) - e^x \times e^x}{(e^x+4)^2} = \frac{2 \times 4e^x}{(e^x+4)^2} = \frac{8e^x}{(e^x+4)^2}$

Signe de $h'(x)$: $e^x > 0$, $(e^x+4)^2 > 0$, donc $h'(x) > 0$.

Variations : h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	↗	2

4. k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $k(x) = \frac{e^{2x}}{x+3}$ **(définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$)**

<u>Dérivée :</u> $k'(x) = \frac{2e^{2x}(x+3)-e^{2x}\times 1}{(x+3)^2} = \frac{e^{2x}(2x+6-1)}{(x+3)^2} = \frac{e^{2x}(2x+5)}{(x+3)^2}$

<u>Signe de $k'(x)$:</u> $e^{2x} > 0$, $(x+3)^2 > 0$ (sauf en $x = -3$), donc le signe est celui de $2x + 5$.

$2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

<u>Variations :</u>

Si $x < -\frac{5}{2}$ (et $x \neq -3$), $2x + 5 < 0$, donc $k'(x) < 0$, k est décroissante.

Si $x > -\frac{5}{2}$, $2x + 5 > 0$, donc $k'(x) > 0$, k est croissante.

Minimum en $x = -\frac{5}{2}$, $k(-\frac{5}{2}) = \frac{e^{-5}}{0{,}5} = 2e^{-5}$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$k(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2e^{-5}$	↗	$+\infty$

<u>Exercice n°4 :</u> Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x}$

<u>Dérivée :</u> $f'(x) = e^{2x} + x \times 2e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x)$

<u>Signe de $f'(x)$:</u> $e^{2x} > 0$, donc le signe est celui de $1 + 2x$

$1 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

<u>Variations :</u>

Si $x < -\frac{1}{2}$, $1 + 2x < 0$, donc $f'(x) < 0$, fest décroissante.

Si $x > -\frac{1}{2}$, $1 + 2x > 0$, donc $f'(x) > 0$, fest croissante.

Minimum en $x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-1} = -\frac{1}{2e}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗	$+\infty$

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 2)e^x$

<u>Dérivée :</u> $g'(x) = e^x + (x + 2)e^x = e^x(x + 3)$

<u>Signe de $g'(x)$:</u> $e^x > 0$, donc le signe est celui de $x + 3$

$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

<u>Variations :</u>

Si $x < -3$, $x + 3 < 0$, donc $g'(x) < 0$, g est décroissante.

Si $x > -3$, $x + 3 > 0$, donc $g'(x) > 0$, g est croissante.

Minimum en $x = -3$, $g(-3) = -e^{-3}$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e^{-3}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2e^{-x}$

Dérivée : $h'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2 - x)$

Signe de $h'(x)$: $e^{-x} > 0$, donc le signe est celui de $x(2 - x)$

Racines : $x = 0$ et $x = 2$

Variations :

Si $x < 0$, $x < 0$ et $2 - x > 0$, donc $h'(x) < 0$, h est décroissante.
Si $0 < x < 2$, $x > 0$ et $2 - x > 0$, donc $h'(x) > 0$, h est croissante.
Si $x > 2$, $x > 0$ et $2 - x < 0$, donc $h'(x) < 0$, h est décroissante.
Minimum en $x = 0$, $h(0) = 0$
Maximum en $x = 2$, $h(2) = 4e^{-2}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

4. k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 2xe^{3x}$

Dérivée : $k'(x) = 2e^{3x} + 2x \times 3e^{3x} = 2e^{3x}(1 + 3x)$
Signe de $k'(x)$: $e^{3x} > 0$, donc le signe est celui de $1 + 3x$

$1 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

Variations :

Si $x < -\frac{1}{3}$, $1 + 3x < 0$, donc $k'(x) < 0$, k est décroissante.

Si $x > -\frac{1}{3}$, $1 + 3x > 0$, donc $k'(x) > 0$, k est croissante.

Minimum en $x = -\frac{1}{3}$, $k(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}e^{-1} = -\frac{2}{3e}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{2}{3e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice n°5 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-2x+1} - 5$

Dérivée : $f'(x) = 3 \times (-2)e^{-2x+1} = -6e^{-2x+1}$

Signe de $f'(x)$: $e^{-2x+1} > 0$, donc $f'(x) < 0$

Variations : f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	5

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)e^{-x}$

Dérivée : $g'(x) = e^{-x} + (x-2)(-1)e^{-x} = e^{-x}(1 - x + 2) = e^{-x}(3-x)$

Signe de $g'(x)$: $e^{-x} > 0$, donc le signe est celui de $3 - x$

$3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Variations :

Si $x < 3$, $3 - x > 0$, donc $g'(x) > 0$, g est croissante.

Si $x > 3$, $3 - x < 0$, donc $g'(x) < 0$, g est décroissante.

Maximum en $x = 3$, $g(3) = e^{-3}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$	0

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{5x}{e^{2x}}$

Dérivée : $h'(x) = 5e^{-2x} + 5x(-2)e^{-2x} = 5e^{-2x}(1-2x)$

Signe de $h'(x)$: $e^{-2x} > 0$, donc le signe est celui de $1 - 2x$

$1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Variations :

Si $x < \frac{1}{2}$, $1 - 2x > 0$, donc $h'(x) > 0$, h est croissante.

Si $x > \frac{1}{2}$, $1 - 2x < 0$, donc $h'(x) < 0$, h est décroissante.

Maximum en $x = \frac{1}{2}$, $h(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}e^{-1} = \frac{5}{2e}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{2e}$	$\searrow$	0

4. k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \frac{4}{e^{-x}}$

Dérivée : $k'(x) = 4e^x$

Signe de $k'(x)$: $e^x > 0$, donc $k'(x) > 0$.

Variations : k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice n°6 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

Dérivée : $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

Signe de $f'(x)$: $e^x > 0$, $(e^x+1)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Variations : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x-1)e^{-x+2}$

Dérivée : $g'(x) = 3e^{-x+2} + (3x-1)(-1)e^{-x+2} = e^{-x+2}(3-3x+1) = e^{-x+2}(4-3x)$

Signe de $g'(x)$: $e^{-x+2} > 0$, donc le signe est celui de $4-3x$

$4-3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

Variations :

Si $x < \frac{4}{3}$, $4-3x > 0$, donc $g'(x) > 0$, g est croissante.

Si $x > \frac{4}{3}$, $4-3x < 0$, donc $g'(x) < 0$, g est décroissante.

Maximum en $x = \frac{4}{3}$, $g(\frac{4}{3}) = 3e^{2/3}$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3e^{2/3}$	$\searrow$	0

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^x - 4x + 1$

Dérivée : $h'(x) = 2e^x - 4$

Racine : $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Signe de $h'(x)$:
Si $x < \ln 2$, $e^x < 2$, donc $h'(x) < 0$
Si $x > \ln 2$, $e^x > 2$, donc $h'(x) > 0$

Variations :
h est décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$
h est croissante sur $[\ln 2, +\infty[$
Minimum en $x = \ln 2$, $h(\ln 2) = 5 - 4\ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$5 - 4\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = -e^x + 2x - 3$

Dérivée : $k'(x) = -e^x + 2$

Racine : $k'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Signe de $k'(x)$:
Si $x < \ln 2$, $e^x < 2$, donc $-e^x > -2$, alors $k'(x) > 0$
Si $x > \ln 2$, $e^x > 2$, donc $-e^x < -2$, alors $k'(x) < 0$

Variations :
k est croissante sur $]-\infty, \ln 2]$
k est décroissante sur $[\ln 2, +\infty[$
Maximum en $x = \ln 2$, $k(\ln 2) = 2\ln 2 - 5$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\ln 2 - 5$	$\searrow$	$-\infty$