



Exercice n°1 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une expression de la dérivée puis étudier les variations sur \mathbb{R} .

1. $f: x \mapsto e^{2x}$
2. $g: x \mapsto 3e^{-x+2}$
3. $h: x \mapsto -2e^{3x-1}$

Exercice n°2 : Étudier les variations des fonctions suivantes, toutes définies sur \mathbb{R} .

1. $f: x \mapsto e^x - 2x$
2. $g: x \mapsto e^{-x} + x$
3. $h: x \mapsto e^{3x} - 3x + 2$

Exercice n°3 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$
2. g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{3}{e^x+2}$
3. h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{2e^x}{e^x+4}$
4. k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $k(x) = \frac{e^{2x}}{x+3}$

Exercice n°4 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{2x}$
2. g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x+2)e^x$
3. h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2e^{-x}$
4. k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = 2xe^{3x}$

Exercice n°5 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3e^{-2x+1} - 5$
2. g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x-2)e^{-x}$
3. h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{5x}{e^{2x}}$
4. k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = \frac{4}{e^{-x}}$

Exercice n°6 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$
2. g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (3x-1)e^{-x+2}$
3. h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2e^x - 4x + 1$
4. k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = -e^x + 2x - 3$



Correction

Exercice n°1 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une expression de la dérivée puis étudier les variations sur \mathbb{R} .

1. $f: x \mapsto e^{2x}$

Dérivée : $f'(x) = 2e^{2x}$ (dérivée de e^u avec $u = 2x$, $u' = 2$).

Comme $e^{2x} > 0$ pour tout x , on a $f'(x) > 0$.

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

2. $g: x \mapsto 3e^{-x+2}$

Dérivée : $g'(x) = 3 \times (-1)e^{-x+2} = -3e^{-x+2}$ (dérivée de e^u avec $u = -x + 2$, $u' = -1$).

Comme $e^{-x+2} > 0$, $g'(x) < 0$.

Donc g est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$		

3. $h: x \mapsto -2e^{3x-1}$

Dérivée : $h'(x) = -2 \times 3e^{3x-1} = -6e^{3x-1}$.

$e^{3x-1} > 0$, donc $h'(x) < 0$.

Donc h est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	-	
$h(x)$		

Exercice n°2 : Étudier les variations des fonctions suivantes, toutes définies sur \mathbb{R} .

1. $f: x \mapsto e^x - 2x$

Dérivée : $f'(x) = e^x - 2$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

Signe de $f'(x)$:

Si $x < \ln 2$, $e^x < 2$ donc $f'(x) < 0$.

Si $x > \ln 2$, $e^x > 2$ donc $f'(x) > 0$.

Variations :

f est décroissante sur $] - \infty, \ln 2]$, croissante sur $[\ln 2, +\infty[$.

Minimum en $x = \ln 2$, $f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$.

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$2 - 2\ln 2$	$+\infty$

2. $g: x \mapsto e^{-x} + x$

Dérivée : $g'(x) = -e^{-x} + 1$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Signe :

Si $x < 0$, $-x > 0$ donc $e^{-x} > 1$, alors $-e^{-x} < -1$ et $g'(x) < 0$.

Si $x > 0$, $e^{-x} < 1$ donc $-e^{-x} > -1$, et comme on ajoute 1, $g'(x) > 0$.

Variations :

g est décroissante sur $] - \infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$.

Minimum en $x = 0$, $g(0) = 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3. $h: x \mapsto e^{3x} - 3x + 2$

Dérivée : $h'(x) = 3e^{3x} - 3 = 3(e^{3x} - 1)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{3x} = 1 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Signe :

Si $x < 0$, $e^{3x} < 1$ donc $h'(x) < 0$.

Si $x > 0$, $e^{3x} > 1$ donc $h'(x) > 0$.

Variations :

h est décroissante sur $] - \infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$.

Minimum en $x = 0$, $h(0) = 1 - 0 + 2 = 3$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

Exercice n°3 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ (**définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$**)

Dérivée : $f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{e^x \times x}{(x+1)^2}$

Signe de $f'(x)$: $e^x > 0$, $(x+1)^2 > 0$ (sauf en $x = -1$), donc le signe est celui de x .

Variations :

Si $x < 0$ (et $x \neq -1$), $f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $] -\infty, -1[$ et $] -1, 0[$.

Si $x > 0$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $[0, +\infty[$.

Minimum en $x = 0$, $f(0) = 1$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	+
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	1 ↗ $+\infty$	$+\infty$

2. g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{3}{e^x + 2}$

Dérivée : $g'(x) = 3 \times \frac{-e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x + 2)^2}$

Signe de $g'(x)$: $e^x > 0$, $(e^x + 2)^2 > 0$, donc $g'(x) < 0$.

Variations : g est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$\frac{3}{2}$ ↘ 0	0

3. h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{2e^x}{e^x + 4}$

Dérivée : $h'(x) = \frac{2 \times e^x(e^x + 4) - e^x \times e^x}{(e^x + 4)^2} = \frac{2 \times 4e^x}{(e^x + 4)^2} = \frac{8e^x}{(e^x + 4)^2}$

Signe de $h'(x)$: $e^x > 0$, $(e^x + 4)^2 > 0$, donc $h'(x) > 0$.

Variations : h est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	0 ↗ 2	2

4. k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $k(x) = \frac{e^{2x}}{x+3}$ (**définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$**)

Dérivée : $k'(x) = \frac{2e^{2x}(x+3) - e^{2x} \times 1}{(x+3)^2} = \frac{e^{2x}(2x+6-1)}{(x+3)^2} = \frac{e^{2x}(2x+5)}{(x+3)^2}$

Signe de $k'(x)$: $e^{2x} > 0$, $(x+3)^2 > 0$ (sauf en $x = -3$), donc le signe est celui de $2x+5$.


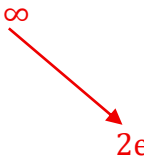
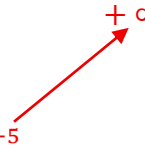
$$2x+5=0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Variations :

Si $x < -\frac{5}{2}$ (et $x \neq -3$), $2x+5 < 0$, donc $k'(x) < 0$, k est décroissante.

Si $x > -\frac{5}{2}$, $2x+5 > 0$, donc $k'(x) > 0$, k est croissante.

Minimum en $x = -\frac{5}{2}$, $k(-\frac{5}{2}) = \frac{e^{-5}}{0,5} = 2e^{-5}$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$k'(x)$	$-$		0	$+$
$k(x)$	0 		$+\infty$ 	$+\infty$ 
	$-\infty$		$2e^{-5}$	

Exercice n°4 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{2x}$

Dérivée : $f'(x) = e^{2x} + x \times 2e^{2x} = e^{2x}(1+2x)$

Signe de $f'(x)$: $e^{2x} > 0$, donc le signe est celui de $1+2x$


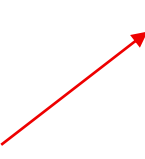
$$1+2x=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Variations :

Si $x < -\frac{1}{2}$, $1+2x < 0$, donc $f'(x) < 0$, f est décroissante.

Si $x > -\frac{1}{2}$, $1+2x > 0$, donc $f'(x) > 0$, f est croissante.

Minimum en $x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-1} = -\frac{1}{2e}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 		$+\infty$ 
		$-\frac{1}{2e}$	

2. g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x+2)e^x$

Dérivée : $g'(x) = e^x + (x+2)e^x = e^x(x+3)$

Signe de $g'(x)$: $e^x > 0$, donc le signe est celui de $x+3$

$$x+3=0 \Leftrightarrow x = -3$$

Variations :

Si $x < -3$, $x+3 < 0$, donc $g'(x) < 0$, g est décroissante.

Si $x > -3$, $x+3 > 0$, donc $g'(x) > 0$, g est croissante.

Minimum en $x = -3$, $g(-3) = -e^{-3}$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$-e^{-3}$	$+\infty$

3. h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2 e^{-x}$

Dérivée : $h'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2 - x)$

Signe de $h'(x)$: $e^{-x} > 0$, donc le signe est celui de $x(2 - x)$

Racines : $x = 0$ et $x = 2$

Variations :

Si $x < 0$, $x < 0$ et $2 - x > 0$, donc $h'(x) < 0$, h est décroissante.

Si $0 < x < 2$, $x > 0$ et $2 - x > 0$, donc $h'(x) > 0$, h est croissante.

Si $x > 2$, $x > 0$ et $2 - x < 0$, donc $h'(x) < 0$, h est décroissante.

Minimum en $x = 0$, $h(0) = 0$

Maximum en $x = 2$, $h(2) = 4e^{-2}$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$h(x)$	$+\infty$	0	$4e^{-2}$	0

4. k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = 2xe^{3x}$

Dérivée : $k'(x) = 2e^{3x} + 2x \times 3e^{3x} = 2e^{3x}(1 + 3x)$

Signe de $k'(x)$: $e^{3x} > 0$, donc le signe est celui de $1 + 3x$

$$1 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Variations :

Si $x < -\frac{1}{3}$, $1 + 3x < 0$, donc $k'(x) < 0$, k est décroissante.

Si $x > -\frac{1}{3}$, $1 + 3x > 0$, donc $k'(x) > 0$, k est croissante.

Minimum en $x = -\frac{1}{3}$, $k(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}e^{-1} = -\frac{2}{3e}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	0	$+$
$k(x)$	0	$-\frac{2}{3e}$	$+\infty$

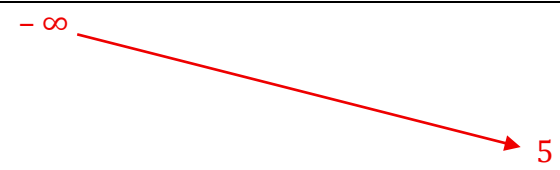
Exercice n°5 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3e^{-2x+1} - 5$

Dérivée : $f'(x) = 3 \times (-2)e^{-2x+1} = -6e^{-2x+1}$

Signe de $f'(x)$: $e^{-2x+1} > 0$, donc $f'(x) < 0$

Variations : f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$		

2. g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x - 2)e^{-x}$

Dérivée : $g'(x) = e^{-x} + (x - 2)(-1)e^{-x} = e^{-x}(1 - x + 2) = e^{-x}(3 - x)$

Signe de $g'(x)$: $e^{-x} > 0$, donc le signe est celui de $3 - x$

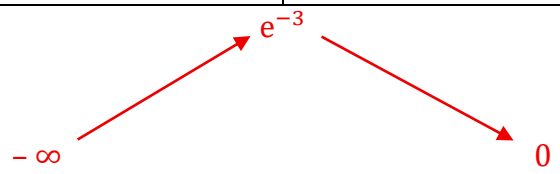
$3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Variations :

Si $x < 3$, $3 - x > 0$, donc $g'(x) > 0$, g est croissante.

Si $x > 3$, $3 - x < 0$, donc $g'(x) < 0$, g est décroissante.

Maximum en $x = 3$, $g(3) = e^{-3}$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

3. h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{5x}{e^{2x}}$

Dérivée : $h'(x) = 5e^{-2x} + 5x(-2)e^{-2x} = 5e^{-2x}(1 - 2x)$

Signe de $h'(x)$: $e^{-2x} > 0$, donc le signe est celui de $1 - 2x$

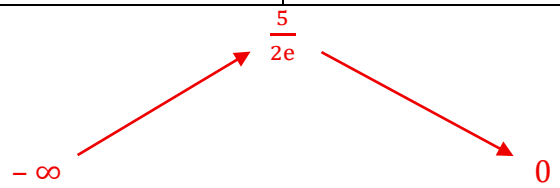
$1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Variations :

Si $x < \frac{1}{2}$, $1 - 2x > 0$, donc $h'(x) > 0$, h est croissante.

Si $x > \frac{1}{2}$, $1 - 2x < 0$, donc $h'(x) < 0$, h est décroissante.

Maximum en $x = \frac{1}{2}$, $h(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}e^{-1} = \frac{5}{2e}$

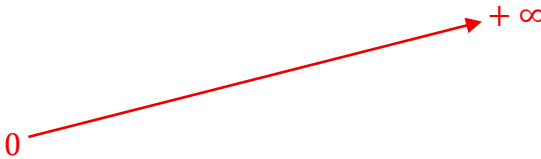
x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$			

4. k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = \frac{4}{e^{-x}}$

Dérivée : $k'(x) = 4e^x$

Signe de $k'(x)$: $e^x > 0$, donc $k'(x) > 0$.

Variations : k est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$k'(x)$	+	
$k(x)$		

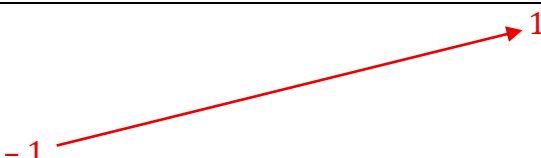
Exercice n°6 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes.

1. f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Dérivée : $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

Signe de $f'(x)$: $e^x > 0$, $(e^x + 1)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Variations : f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

2. g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (3x - 1)e^{-x+2}$

Dérivée : $g'(x) = 3e^{-x+2} + (3x - 1)(-1)e^{-x+2} = e^{-x+2}(3 - 3x + 1) = e^{-x+2}(4 - 3x)$

Signe de $g'(x)$: $e^{-x+2} > 0$, donc le signe est celui de $4 - 3x$

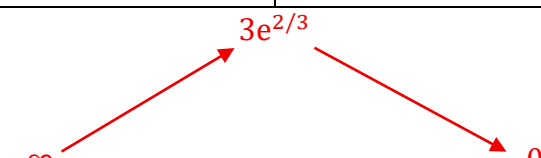
$$4 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Variations :

Si $x < \frac{4}{3}$, $4 - 3x > 0$, donc $g'(x) > 0$, g est croissante.

Si $x > \frac{4}{3}$, $4 - 3x < 0$, donc $g'(x) < 0$, g est décroissante.

Maximum en $x = \frac{4}{3}$, $g(\frac{4}{3}) = 3e^{2/3}$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

3. h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2e^x - 4x + 1$

Dérivée : $h'(x) = 2e^x - 4$

Racine : $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Signe de $h'(x)$:

Si $x < \ln 2$, $e^x < 2$, donc $h'(x) < 0$

Si $x > \ln 2$, $e^x > 2$, donc $h'(x) > 0$

Variations :

h est décroissante sur $] -\infty, \ln 2]$

h est croissante sur $[\ln 2, +\infty[$

Minimum en $x = \ln 2$, $h(\ln 2) = 5 - 4\ln 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	$5 - 4\ln 2$	$+\infty$

4. k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = -e^x + 2x - 3$

Dérivée : $k'(x) = -e^x + 2$

Racine : $k'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Signe de $k'(x)$:

Si $x < \ln 2$, $e^x < 2$, donc $-e^x > -2$, alors $k'(x) > 0$

Si $x > \ln 2$, $e^x > 2$, donc $-e^x < -2$, alors $k'(x) < 0$

Variations :

k est croissante sur $] -\infty, \ln 2]$

k est décroissante sur $[\ln 2, +\infty[$

Maximum en $x = \ln 2$, $k(\ln 2) = 2\ln 2 - 5$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$k'(x)$	+	0	-
$k(x)$	$-\infty$	$2\ln 2 - 5$	$-\infty$