Déterminer une équation cartésienne de droite avec un vecteur normal et un point

Exercice n°1 : Dans chaque cas, donner une équation cartésienne de la droite passant par le point B et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. $B(1;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$
2. $B(-1;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$
3. $B(0;-2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$
4. $B(5;0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Exercice n°2 : Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point donné et de vecteur normal $\vec{n}$
donné.

1. $A\left(\frac{1}{2};-3\right)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$
2. $G\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$
3. $D(\sqrt{2};2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Exercice n°3 : Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point donné et dont un vecteur normal est donné.

1. $S(3;-2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$
2. $V(-2;-3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$

Exercice n°4 : On donne le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ et le point $E(2;5)$.

1. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal au vecteur $\vec{u}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par Eet de vecteur normal $\vec{n}$.

Exercice n°5 : On considère la droite d d'équation cartésienne $2x+3y-6=0$.

1. Donner un vecteur directeur de d.
2. En déduire un vecteur normal de d.
3. Donner une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $d$passant par l'origine $O(0;0)$.

Exercice n°6 : On considère la droite d d'équation réduite $y=\frac{2}{3}x-4$.

1. Donner un vecteur directeur de d.
2. En déduire un vecteur normal de d.
3. Donner une équation cartésienne de la droite d'perpendiculaire à $d$passant par le point $B(-1;3)$.
4. Donner une équation réduite de la droite d'.

Exercice n°7 : On considère la droite d d'équation cartésienne $4x-7y+2=0$.

1. Donner un vecteur directeur de d.
2. En déduire un vecteur normal de d.

3. Donner une équation cartésienne de la droite d'perpendiculaire à $d$passant par le point $C(3;-1)$.
4. Donner une équation réduite de la droite d'.

Déterminer une équation cartésienne de droite avec un vecteur normal et un point

Correction

Exercice n°1 : Dans chaque cas, donner une équation cartésienne de la droite passant par le point B et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. $B(1;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Étape n°1 : Vecteur normal $a = 3$, $b = -1$
Forme de l'équation : $3x - y + c = 0$.

Étape n°2 : Avec le point B(1; 2) :
$3 \times 1 - 2 + c = 0$
$3 - 2 + c = 0$
$1 + c = 0$
$c = -1$.

Étape n°3 : Équation : $3x - y - 1 = 0$

2. $B(-1;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

Étape n°1 : Vecteur normal $a = 2$, $b = 5$
Forme : $2x + 5y + c = 0$.

Étape n°2 : Avec B(-1; 3) :
$2(-1) + 5(3) + c = 0$
$-2 + 15 + c = 0$
$13 + c = 0$
$c = -13$.

Étape n°3 : Équation : $2x + 5y - 13 = 0$

3. $B(0;-2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

Étape n°1 : Vecteur normal $a = -4$, $b = 3$
Forme : $-4x + 3y + c = 0$.

Étape n°2 : Avec B(0; -2) :
$-4(0) + 3(-2) + c = 0$
$0 - 6 + c = 0$
$-6 + c = 0$
$c = 6$.

Étape n°3 : Équation : $-4x + 3y + 6 = 0$
On peut multiplier par -1 pour avoir $4x - 3y - 6 = 0$.

4. $B(5;0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Étape n°1 : $a = 1$, $b = 1$
Forme : $x + y + c = 0$.

Étape n°2 : Avec B(5; 0) :
$5 + 0 + c = 0$
$5 + c = 0$
$c = -5$.

Étape n°3 : Équation : $x + y - 5 = 0$

Exercice n°2 : Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point donné et de vecteur normal $\vec{n}$
donné.

1. $A\left(\frac{1}{2}; -3\right)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Étape n°1 : $a = 4, b = -2$
Forme : $4x - 2y + c = 0.$

Étape n°2 : Avec $A(\frac{1}{2}; -3)$:
$4 \cdot \dfrac{1}{2} - 2(-3) + c = 0$
$2 + 6 + c = 0$
$8 + c = 0$
$c = -8.$

Étape n°3 : Équation : $4x - 2y - 8 = 0$
Simplification (diviser par 2) : $2x - y - 4 = 0$

2. $G\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Étape n°1 : $a = -6, b = 3$
Forme : $-6x + 3y + c = 0.$

Étape n°2 : Avec $G(-\frac{5}{2}; \frac{1}{4})$:
$-6\left(-\dfrac{5}{2}\right) + 3\left(\dfrac{1}{4}\right) + c = 0$
$15 + \dfrac{3}{4} + c = 0$
$\dfrac{60}{4} + \dfrac{3}{4} + c = \dfrac{63}{4} + c = 0$
$c = -\frac{63}{4}.$

Étape n°3 : Équation : $-6x + 3y - \frac{63}{4} = 0$
Multiplier par 4 : $-24x + 12y - 63 = 0.$
Simplifier (diviser par -3) : $8x - 4y + 21 = 0$

3. $D(\sqrt{2}; 2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Étape n°1 : $a = 1, b = -\sqrt{2}$
Forme : $x - \sqrt{2}y + c = 0.$

Étape n°2 : Avec $D(\sqrt{2}; 2)$:
$\sqrt{2} - \sqrt{2}(2) + c = 0$
$\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + c = 0$
$-\sqrt{2} + c = 0$
$c = \sqrt{2}.$
Étape n°3 : Équation : $x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$

Exercice n°3 : Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point donné et dont un vecteur normal est donné.

1. $S(3;-2)$ et $\vec{n}\binom{0}{3}$

Étape n°1 : $a=0, b=3$
Forme : $0x+3y+c=0$ soit $3y+c=0$.

Étape n°2 : Avec S(3; -2) :
$3(-2)+c=0$
$-6+c=0$
$c=6.$

Étape n°3 : Équation : $3y+6=0$
Simplifier : $y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$

2. $V(-2;-3)$ et $\vec{n}\binom{4}{-8}$

Étape n°1 : Simplifier le vecteur normal (diviser par 4) : $\overrightarrow{n'}\binom{1}{-2}$.
$a=1, b=-2$
Forme : $x-2y+c=0$.

Étape n°2 : Avec V(-2; -3) :

$$-2-2(-3)+c=0$$
$$-2+6+c=0$$
$$4+c=0$$

$c=-4.$

Étape n°3 : Équation : $x-2y-4=0$

Exercice n°4 : On donne le vecteur $\vec{u}\binom{3}{-4}$ et le point $E(2;5)$.

1. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

Deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$et $\vec{n}(x';y')$
sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul :

$$3x'+(-4)y'=0 \text{soit} 3x'-4y'=0$$

On peut choisir par exemple $x'=4$et $y'=3$ (car $3\times 4-4\times 3=12-12=0$).
Donc un vecteur normal possible est : $\vec{n}\binom{4}{3}$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par Eet de vecteur normal $\vec{n}$.

Avec $\vec{n}\binom{4}{3}$, l'équation est de la forme :

$$4x+3y+c=0$$

Le point $E(2;5)$appartient à la droite :

$$4\times 2+3\times 5+c=0$$
$$8+15+c=0$$
$$23+c=0$$
$$c=-23$$

L'équation cartésienne est : $4x+3y-23=0$

Exercice n°5 : On considère la droite d d'équation cartésienne $2x+3y-6=0$.

1. Donner un vecteur directeur de d.

Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

2. En déduire un vecteur normal de d.

On peut prendre $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

3. Donner une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $d$passant par l'origine $O(0;0)$.

Une droite perpendiculaire à d a pour vecteur directeur un vecteur normal de d, soit $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, ou pour vecteur normal un vecteur directeur de d, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

Prenons comme vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

L'équation est de la forme : $-3x+2y+c=0$

Passant par $O(0;0)$: $0+0+c=0$ donc $c=0$.

L'équation est : $-3x+2y=0$ ou $3x-2y=0$

<u>Exercice n°6 :</u> On considère la droite d d'équation réduite $y=\frac{2}{3}x-4$.

1. Donner un vecteur directeur de d.

Le coefficient directeur est $m=\frac{2}{3}$.

Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, ou mieux $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

2. En déduire un vecteur normal de d.

Un vecteur normal est orthogonal à $\vec{u}$, par exemple $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ (produit scalaire nul : $3\times(-2)+2\times3=-6+6=0$), ou $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

3. Donner une équation cartésienne de la droite d'perpendiculaire à $d$passant par le point $B(-1;3)$.

Un vecteur normal de d'peut être un vecteur directeur de d, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Équation de d': $3x+2y+c=0$

Avec $B(-1;3)$: $3\times(-1)+2\times3+c=0$

$$-3+6+c=0$$
$$3+c=0$$
$$c=-3$$

Équation cartésienne : $3x+2y-3=0$

4. Donner une équation réduite de la droite d'.

De $3x+2y-3=0$ on tire :

$$2y=-3x+3$$
$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

<u>Exercice n°7 :</u> On considère la droite d d'équation cartésienne $4x - 7y + 2 = 0$.

1. Donner un vecteur directeur de d.

Vecteur directeur : $\vec{u}\binom{7}{4}$

2. En déduire un vecteur normal de d.

Vecteur normal : $\vec{n}\binom{4}{-7}$

3. Donner une équation cartésienne de la droite d'perpendiculaire à $d$passant par le point $C(3;-1)$.

Un vecteur normal de d'peut être $\vec{u}\binom{7}{4}$.

Équation : $7x + 4y + c = 0$

Avec $C(3;-1)$: $7 \times 3 + 4 \times (-1) + c = 0$

$$21 - 4 + c = 0$$
$$17 + c = 0$$
$$c = -17$$

Équation cartésienne : $7x + 4y - 17 = 0$

4. Donner une équation réduite de la droite d'.

$$y = -\frac{7}{4}x + \frac{17}{4}$$