# Déterminer un nombre dérivé

**Exercice n°1 :**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 3.$$

Déterminer le taux d'accroissement de $f$ en $1$. En déduire le nombre dérivé de $f$ en $1$.

2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4}{x^2 + 2}$$

Déterminer le taux d'accroissement de $g$ en $-1$. En déduire le nombre dérivé de $g$ en $-1$.

**Exercice n°2 :** Utiliser la définition du nombre dérivé pour les questions suivantes.

1. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x - 7$$

Déterminer la valeur de $f'(2)$.

2. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

Déterminer la valeur de $f'(4)$.

3. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3$$

Déterminer la valeur de $f'(1)$.

4. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Déterminer la valeur de $f'(8)$.

5. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 7x - 5$$

Déterminer $f'(3)$.

6. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = -\frac{3}{x}$$

Déterminer $f'(2)$.

7. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4x^2$$

Déterminer $f'(-2)$.

8. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par

$$f(x) = \sqrt{x + 1}$$

Déterminer $f'(3)$.

## Correction

**Exercice n°1 :**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 3$$

Déterminer le taux d'accroissement de $f$ en $1$. En déduire le nombre dérivé de $f$ en $1$.

La fonction $f$ est définie par $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$
Le taux d'accroissement de $f$ entre $1$ et $1 + h$ (avec $h \neq 0$) est :

$$\tau_f(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Calcul de $f(1)$:

$$f(1) = -2 \times 1^2 + 5 \times 1 - 3 = -2 + 5 - 3 = 0.$$

Calcul de $f(1+h)$:

$$\begin{aligned} f(1+h) &= -2(1+h)^2 + 5(1+h) - 3 \\ &= -2(1 + 2h + h^2) + 5 + 5h - 3 \\ &= -2 - 4h - 2h^2 + 5 + 5h - 3 \\ &= (-2 + 5 - 3) + (-4h + 5h) - 2h^2 \\ &= 0 + h - 2h^2 \\ &= h - 2h^2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\tau_f(h) = \frac{(h - 2h^2) - 0}{h} = \frac{h - 2h^2}{h}$$

Pour $h \neq 0$, on simplifie par $h$:

$$\tau_f(h) = 1 - 2h.$$

Le nombre dérivé de $f$ en $1$ est la limite du taux d'accroissement quand $h$ tend vers 0 :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \tau_f(h) = \lim_{h \to 0} (1 - 2h) = 1.$$

Taux d'accroissement : $1 - 2h.$
Nombre dérivé : $f'(1) = 1.$

2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4}{x^2 + 2}$$

Déterminer le taux d'accroissement de $g$ en $-1$. En déduire le nombre dérivé de $g$ en $-1$.

La fonction $g$ est définie par $g(x) = \frac{4}{x^2+2}$
Le taux d'accroissement de $g$ entre $-1$ et $-1 + h$ (avec $h \neq 0$) est :

$$\tau_g(h) = \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h}$$

Calcul de $g(-1)$:

$$g(-1) = \frac{4}{(-1)^2 + 2} = \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3}$$

Calcul de $g(-1+h)$:

$$g(-1+h)=\frac{4}{(-1+h)^2+2}=\frac{4}{(1-2h+h^2)+2}=\frac{4}{3-2h+h^2}$$

Ainsi :

$$\tau_g(h)=\frac{\frac{4}{3-2h+h^2}-\frac{4}{3}}{h}$$

Mettons les termes du numérateur au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{4}{3-2h+h^2}-\frac{4}{3} &= 4\left(\frac{1}{3-2h+h^2}-\frac{1}{3}\right)\\ &= 4\times\frac{3-(3-2h+h^2)}{3(3-2h+h^2)}\\ &= 4\times\frac{2h-h^2}{3(3-2h+h^2)}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\tau_g(h)=\frac{4\times\frac{2h-h^2}{3(3-2h+h^2)}}{h}=\frac{4(2h-h^2)}{3h(3-2h+h^2)}$$

Pour $h\neq 0$, on factorise $h$au numérateur et on simplifie :

$$\tau_g(h)=\frac{4h(2-h)}{3h(3-2h+h^2)}=\frac{4(2-h)}{3(3-2h+h^2)}$$

Le nombre dérivé de $g$en $-1$est la limite du taux d'accroissement quand $h$ tend vers 0 :

$$g'(-1)=\lim_{h\to 0}\tau_g(h)=\frac{4(2-0)}{3(3-0+0)}=\frac{8}{9}$$

Taux d'accroissement : $\frac{4(2-h)}{3(3-2h+h^2)}$

Nombre dérivé : $g'(-1)=\frac{8}{9}$

**<u>Exercice n°2 :</u>** Utiliser la définition du nombre dérivé pour les questions suivantes.

1. Soit $f$la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x-7$$

Déterminer la valeur de $f'(2)$.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{[3(2+h)-7]-[3\times 2-7]}{h}=\frac{[6+3h-7]-[6-7]}{h}$$
$$=\frac{[3h-1]-[-1]}{h}=\frac{3h-1+1}{h}=\frac{3h}{h}=3$$

La limite quand $h\to 0$ vaut 3.

$$f'(2)=3$$

2. Soit $f$la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2x}$$

Déterminer la valeur de $f'(4)$.

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{\frac{1}{2(4+h)}-\frac{1}{8}}{h}$$

Réduction au même dénominateur au numérateur :

$$\frac{1}{2(4+h)}-\frac{1}{8}=\frac{8-2(4+h)}{8\times 2(4+h)}=\frac{8-8-2h}{16(4+h)}=\frac{-2h}{16(4+h)}$$

Ainsi :

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{\frac{-2h}{16(4+h)}}{h}=\frac{-2h}{16(4+h)h}=\frac{-2}{16(4+h)}=\frac{-1}{8(4+h)}$$

Quand $h\to 0$, $4+h\to 4$, donc :

$$f'(4)=\frac{-1}{8\times 4}=-\frac{1}{32}$$

$$f'(4)=-\frac{1}{32}$$

3. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3$$

Déterminer la valeur de $f'(1)$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^3-1^3}{h}$$

Or $(1+h)^3=1+3h+3h^2+h^3$. Donc :

$$\frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h}=\frac{3h+3h^2+h^3}{h}=3+3h+h^2$$

Quand $h\to 0$, $3+3h+h^2\to 3$.

$$f'(1)=3$$

4. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

Déterminer la valeur de $f'(8)$.

$$\frac{f(8+h)-f(8)}{h}=\frac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h}$$

On utilise l'identité $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$avec $a=\sqrt[3]{8+h}$ , $b=2$.
Multiplions numérateur et dénominateur par $a^2+ab+b^2$:

$$\frac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h}\times\frac{(\sqrt[3]{8+h})^2+2\sqrt[3]{8+h}+4}{(\sqrt[3]{8+h})^2+2\sqrt[3]{8+h}+4}$$

Le numérateur devient $(\sqrt[3]{8+h})^3-2^3=(8+h)-8=h$

.

Donc :

$$\frac{f(8+h)-f(8)}{h}=\frac{h}{h[(\sqrt[3]{8+h})^2+2\sqrt[3]{8+h}+4]}$$

Après simplification par $h$(valable pour $h\neq 0$) :

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{8+h})^2+2\sqrt[3]{8+h}+4}$$

Quand $h \to 0$, $\sqrt[3]{8+h} \to 2$
, donc le dénominateur tend vers $4+4+4=12$.
Ainsi :

$$f'(8) = \frac{1}{12}$$

5. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 7x - 5$$

Déterminer $f'(3)$.

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{[7(3+h)-5]-[7\times 3-5]}{h} = \frac{[21+7h-5]-[21-5]}{h} = \frac{16+7h-16}{h} = \frac{7h}{h} = 7$$

Donc $f'(3) = \lim_{h\to 0} 7 = 7$

6. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = -\frac{3}{x}$$

Déterminer $f'(2)$.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-\frac{3}{2+h}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{h} = \frac{-\frac{3}{2+h}+\frac{3}{2}}{h}$$

Réduction au même dénominateur du numérateur :

$$-\frac{3}{2+h}+\frac{3}{2} = \frac{-3\times 2+3(2+h)}{2(2+h)} = \frac{-6+6+3h}{2(2+h)} = \frac{3h}{2(2+h)}$$

Ainsi :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\frac{3h}{2(2+h)}}{h} = \frac{3}{2(2+h)}$$

Quand $h \to 0$, $2+h \to 2$, donc $f'(2) = \frac{3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$.

$$f'(2) = \frac{3}{4}$$

7. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4x^2$$

Déterminer $f'(-2)$.

$$\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \frac{4(-2+h)^2-4(-2)^2}{h} = \frac{4(4-4h+h^2)-16}{h} = \frac{16-16h+4h^2-16}{h} = \frac{-16h+4h^2}{h}$$
$$= -16+4h$$

Quand $h \to 0$, $-16+4h \to -16$

$$f'(-2) = -16$$

8. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

Déterminer $f'(3)$.

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{\sqrt{(3+h)+1}-\sqrt{3+1}}{h}=\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$$

Multiplication par la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\times\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{(4+h)-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

Quand $h\to 0$, $\sqrt{4+h}\to 2$, donc la limite vaut $\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

$$f'(3)=\frac{1}{4}$$