Déterminer un ensemble de points

Exercice n°1 :

On considère les points A et B tels que $AB = 6$. Soit I le milieu de $[AB]$.
Déterminer l'ensemble des points Mdu plan vérifiant :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$$

Exercice n°2 :

On donne les points A et B tels que $AB = 14$ et I le milieu du segment $[AB]$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$$

Exercice n°3 :

On donne les points Cet D tels que $CD = 6$ et J le milieu du segment $[CD]$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = -5$$

Exercice n°4 :

On considère les points $E(-1; 2)$ et $F(3; -4)$.

1. Calculer la longueur EF.
2. Déterminer les coordonnées du milieu Kdu segment $[EF]$.
3. Déterminer l'ensemble des points Mdu plan vérifiant $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$.

Exercice n°5 :

On considère les points $P(0; 5)$ et $Q(6; 1)$.

1. Calculer la longueur PQ.
2. Déterminer les coordonnées du milieu R de $[PQ]$.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = -13$.

Correction

Exercice n°1 :

On considère les points A et B tels que $AB = 6$. Soit I le milieu de $[AB]$.
Déterminer l'ensemble des points Mdu plan vérifiant :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$$

On utilise la formule du produit scalaire en fonction du milieu :

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MI}^2 - \frac{\mathrm{AB}^2}{4}$$

Calculs : $\mathrm{AB} = 6$ donc $\mathrm{AB}^2 = 36$, et $\frac{\mathrm{AB}^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$.

L'équation devient : $\mathrm{MI}^2 - 9 = 5$

$\mathrm{MI}^2 = 14$

$\mathrm{MI} = \sqrt{14}$

Interprétation géométrique : L'ensemble des points M à une distance constante $\sqrt{14}$ du point I est un cercle.

Conclusion : L'ensemble cherché est le **cercle de centre** I**(milieu de** $[\mathrm{AB}]$**) et de rayon** $\sqrt{14}$.

Exercice n°2 :

On donne les points A et B tels que $\mathrm{AB} = 14$ et I le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 8$$

On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MI}^2 - \frac{\mathrm{AB}^2}{4}$$

Avec $\mathrm{AB} = 14$, on obtient $\frac{\mathrm{AB}^2}{4} = \frac{196}{4} = 49$.

L'équation $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 8$

devient : $\mathrm{MI}^2 - 49 = 8$ soit $\mathrm{MI}^2 = 57$

Donc $\mathrm{MI} = \sqrt{57}$

L'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{57}$.

Exercice n°3 :

On donne les points Cet D tels que $\mathrm{CD} = 6$ et J le milieu du segment $[\mathrm{CD}]$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MD}} = -5$$

On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MD}} = \mathrm{MJ}^2 - \frac{\mathrm{CD}^2}{4}$$

Avec $\mathrm{CD} = 6$, on obtient $\frac{\mathrm{CD}^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$.

L'équation $\overrightarrow{\mathrm{MC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MD}} = -5$

devient : $\mathrm{MJ}^2 - 9 = -5$ soit $\mathrm{MJ}^2 = 4$

Donc $\mathrm{MJ} = 2$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre J et de rayon 2.

Exercice n°4 :

On considère les points $E(-1;2)$ et $F(3;-4)$.

1. Calculer la longueur EF.

$EF = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

2. Déterminer les coordonnées du milieu Kdu segment [EF].

$K\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{2+(-4)}{2}\right) = K(1;-1)$

3. Déterminer l'ensemble des points Mdu plan vérifiant $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$.

L'équation $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$ devient, d'après la formule :

$$MK^2 - \frac{EF^2}{4} = 0$$

Or $EF^2 = 52$, donc $\frac{EF^2}{4} = 13$.

Ainsi :

$$MK^2 - 13 = 0 \text{ soit } MK^2 = 13$$

Donc $MK = \sqrt{13}$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre $K(1;-1)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

Exercice n°5 :

On considère les points $P(0;5)$ et $Q(6;1)$.

1. Calculer la longueur PQ.

$PQ = \sqrt{(6-0)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

2. Déterminer les coordonnées du milieu R de [PQ].

$R\left(\frac{0+6}{2}; \frac{5+1}{2}\right) = R(3;3)$

3. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = -13$.

L'équation $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = -13$ devient :

$$MR^2 - \frac{PQ^2}{4} = -13$$

Or $PQ^2 = 52$, donc $\frac{PQ^2}{4} = 13$.

Ainsi : $MR^2 - 13 = -13$ soit $MR^2 = 0$

Donc $MR = 0$, ce qui signifie que M est confondu avec R.

L'ensemble cherché est le point $R(3;3)$uniquement.