Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Exercice n°1 : On considère la droite d d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$ et le point $A(1;4)$.

1. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite d.
2. Donner un vecteur normal à la droite d.
3. En déduire une équation de la droite perpendiculaire à $d$passant par A.
4. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point Asur la droite d.

Exercice n°2 : On considère la droite d d'équation cartésienne $4x + 3y - 5 = 0$ et le point $B(-2;1)$.

1. Vérifier que le point B n'appartient pas à la droite d.
2. Donner un vecteur normal à la droite d.
3. En déduire une équation de la droite perpendiculaire à $d$passant par B.
4. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point Bsur la droite d.

Exercice n°3 : On considère la droite d d'équation cartésienne $-x + 2y - 6 = 0$ et le point $C(3;-2)$.

1. Vérifier que le point C n'appartient pas à la droite d.
2. Donner un vecteur normal à la droite d.
3. En déduire une équation de la droite perpendiculaire à d passant par C.
4. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point Csur la droite d.

Exercice n°4 : On considère la droite d d'équation réduite $y = -2x + 3$ et le point $D(1;5)$.

1. Vérifier que le point D n'appartient pas à la droite d.
2. Donner un vecteur normal à la droite d.
3. En déduire une équation réduite de la droite perpendiculaire à d passant par D.
4. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point Dsur la droite d.

Exercice n°5 : On considère la droite dd'équation réduite $y = -\frac{3}{2}x + 4$ et le point $A(1;-2)$.

1. Donner un vecteur normal à d.
2. En déduire une équation réduite de la droite perpendiculaire à $d$passant par A.
3. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur d.

Exercice n°6 : On considère la droite dd'équation cartésienne $2x + y - 6 = 0$ et le point $B(3;5)$.

1. Donner un vecteur normal à d.
2. En déduire une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $d$passant par B.
3. Déterminer alors les coordonnées du point C, projeté orthogonal de B sur d.
4. Déterminer les coordonnées du point E, projeté orthogonal de B sur la droite d'équation $x = 1$.
5. Montrer que Eest le projeté orthogonal du point Csur la droite (BE).

Exercice n°7 : On considère la droite dd'équation réduite $y = \frac{1}{3}x - 2$ et le point $F(-1;5)$.

1. Donner un vecteur normal à d.
2. En déduire une équation réduite de la droite perpendiculaire à d passant par F.
3. En déduire les coordonnées du point G, projeté orthogonal de F sur d.

Correction

Exercice n°1 : On considère la droite d d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$ et le point $A(1; 4)$.

1. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite d.

On remplace $x = 1$et $y = 4$ dans l'équation $2x - y + 3 = 0$:
$2 \times 1 - 4 + 3 = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0$
Donc A n'appartient pas à d.

2. Donner un vecteur normal à la droite d.

Pour la droite d: $2x - y + 3 = 0$, un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. En déduire une équation de la droite perpendiculaire à $d$passant par A.

Une droite perpendiculaire à da pour vecteur directeur un vecteur normal de d, donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$peut servir de vecteur directeur.
Mais il est plus simple d'utiliser le fait qu'un vecteur normal de la perpendiculaire est un vecteur directeur de d.
Un vecteur directeur de $d$est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (car $-(-1) = 1$ et $a = 2$).
Donc un vecteur normal à la perpendiculaire est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
L'équation de la perpendiculaire est de la forme : $1x + 2y + c = 0$soit $x + 2y + c = 0$.
Elle passe par $A(1; 4)$: $1 + 2 \times 4 + c = 0 \Rightarrow 1 + 8 + c = 0 \Rightarrow c = -9$.
Équation : $x + 2y - 9 = 0$

4. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite d.

Le point Hest l'intersection de $d$et de la perpendiculaire. On résout le système :

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

De la deuxième équation : $x = 9 - 2y$.
Substituons dans la première : $2(9 - 2y) - y + 3 = 0 \Rightarrow 18 - 4y - y + 3 = 0 \Rightarrow 21 - 5y = 0 \Rightarrow y = \frac{21}{5}$.
Puis $x = 9 - 2 \times \frac{21}{5} = 9 - \frac{42}{5} = \frac{45}{5} - \frac{42}{5} = \frac{3}{5}$.
Donc $H\left(\frac{3}{5}; \frac{21}{5}\right)$.

Exercice n°2 : On considère la droite d d'équation cartésienne $4x + 3y - 5 = 0$ et le point $B(-2; 1)$.

1. Vérifier que le point B n'appartient pas à la droite d.

Pour $B(-2; 1)$ dans $4x + 3y - 5 = 0$:
$4 \times (-2) + 3 \times 1 - 5 = -8 + 3 - 5 = -10 \neq 0 \rightarrow B \notin d$.

2. Donner un vecteur normal à la droite d.

Vecteur normal : $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. En déduire une équation de la droite perpendiculaire à $d$passant par B.

Un vecteur directeur de $d$est $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$(ou $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$).

Donc un vecteur normal à la perpendiculaire est $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

Équation : $-3x+4y+c=0$.
Passe par $B(-2;1)$: $-3\times(-2)+4\times 1+c=0 \Rightarrow 6+4+c=0 \Rightarrow c=-10$.
Équation : $-3x+4y-10=0$ ou $3x-4y+10=0$.

4. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point B sur la droite d.

Système :

$$\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ -3x+4y-10=0 \end{cases}$$

Multiplions la première par 4 et la seconde par 3 pour éliminer y:

$$16x+12y-20=0$$
$$-9x+12y-30=0$$

Soustrayons : $(16x+12y-20)-(-9x+12y-30)=0 \rightarrow 25x+10=0 \Rightarrow x=-\frac{10}{25}=-\frac{2}{5}$.
Puis $4\times\left(-\frac{2}{5}\right)+3y-5=0 \Rightarrow -\frac{8}{5}+3y-5=0 \Rightarrow 3y=5+\frac{8}{5}=\frac{25}{5}+\frac{8}{5}=\frac{33}{5} \Rightarrow y=\frac{11}{5}$.
Donc $K\left(-\frac{2}{5};\frac{11}{5}\right)$.

<u>**Exercice n°3 :**</u> On considère la droite d d'équation cartésienne $-x+2y-6=0$ et le point $C(3;-2)$.

1. Vérifier que le point C n'appartient pas à la droite d.

Pour $C(3;-2)$ dans $-x+2y-6=0$:
$-3+2\times(-2)-6=-3-4-6=-13\neq 0 \rightarrow C\notin d$.

2. Donner un vecteur normal à la droite d.

Vecteur normal : $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

3. En déduire une équation de la droite perpendiculaire à d passant par C.

Un vecteur directeur de $d$est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ (car $-b=-2, a=-1$) ou simplifier $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à la perpendiculaire peut être $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Équation : $2x+y+c=0$.
Passe par $C(3;-2)$: $2\times 3+(-2)+c=0 \Rightarrow 6-2+c=0 \Rightarrow c=-4$.
Équation : $2x+y-4=0$

4. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point Csur la droite d.

Système :

$$\begin{cases} -x+2y-6=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases}$$

De la deuxième : $y=4-2x$.
Substituons dans la première : $-x+2(4-2x)-6=0 \Rightarrow -x+8-4x-6=0 \Rightarrow -5x+2=0 \Rightarrow$
$x=\frac{2}{5}$.

Puis $y = 4 - 2 \times \frac{2}{5} = 4 - \frac{4}{5} = \frac{20}{5} - \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$.
Donc $H\left(\frac{2}{5}; \frac{16}{5}\right)$.

Exercice n°4 : On considère la droite d d'équation réduite $y = -2x + 3$ et le point $D(1; 5)$.

1. Vérifier que le point D n'appartient pas à la droite d.

Pour $D(1; 5)$ dans $y = -2x + 3$:
$5 = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1 \rightarrow 5 \neq 1$, donc $D \notin d$.

2. Donner un vecteur normal à la droite d.

L'équation réduite correspond à l'équation cartésienne : $2x + y - 3 = 0$(en passant tout du même côté : $2x + y - 3 = 0$).

Un vecteur normal est donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

3. En déduire une équation réduite de la droite perpendiculaire à d passant par D.

Le coefficient directeur de $d$est $m = -2$.
Le coefficient directeur de la perpendiculaire m'vérifie $m \times m' = -1$(si non verticale).
Donc $m' = \frac{1}{2}$.
La perpendiculaire passe par $D(1; 5)$, son équation réduite est : $y = m'(x - 1) + 5$soit $y = \frac{1}{2}(x - 1) + 5 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 5 = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.
Équation réduite : $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

4. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point Dsur la droite d.

Le point K est l'intersection de $d$et de la perpendiculaire :

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

On égalise : $-2x + 3 = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.
Multiplions par 2 : $-4x + 6 = x + 9$

$$-4x - x = 9 - 6$$
$$-5x = 3$$

$x = -\frac{3}{5}$.
Puis $y = -2 \times (-\frac{3}{5}) + 3 = \frac{6}{5} + 3 = \frac{6}{5} + \frac{15}{5} = \frac{21}{5}$.
Donc $K\left(-\frac{3}{5}; \frac{21}{5}\right)$.

Exercice n°5 : On considère la droite dd'équation réduite $y = -\frac{3}{2}x + 4$ et le point $A(1; -2)$.

1. Donner un vecteur normal à d.

L'équation réduite $y = -\frac{3}{2}x + 4$peut s'écrire sous forme cartésienne :
$\dfrac{3}{2}x + y - 4 = 0$ou en multipliant par 2 :$3x + 2y - 8 = 0$.

Un vecteur normal à d est donc $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

2. En déduire une équation réduite de la droite perpendiculaire à d passant par A.

Le coefficient directeur de d est $m = -\frac{3}{2}$.
Le coefficient directeur m' de toute droite perpendiculaire à d vérifie $m \times m' = -1$ (si les droites ne sont pas verticales).
Ainsi, $m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

La perpendiculaire passe par $A(1; -2)$, donc son équation réduite est :
$y = m'(x-1) - 2 = \frac{2}{3}(x-1) - 2 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$.
$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

3. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur d.

Le point H est l'intersection de d et de la perpendiculaire. On résout le système :

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 4 \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \end{cases}$$

En égalant les deux expressions de y:

$$-\frac{3}{2}x + 4 = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$$

Multiplions par 6 pour éliminer les dénominateurs :

$$-9x + 24 = 4x - 16$$
$$-9x - 4x = -16 - 24$$
$$-13x = -40$$
$$x = \frac{40}{13}$$

On reporte dans l'équation de d (ou de la perpendiculaire) :

$$y = -\frac{3}{2} \times \frac{40}{13} + 4 = -\frac{60}{13} + 4 = -\frac{60}{13} + \frac{52}{13} = -\frac{8}{13}$$

Ainsi,

$$H\left(\frac{40}{13}; -\frac{8}{13}\right)$$

<u>Exercice n°6 :</u> On considère la droite d d'équation cartésienne $2x + y - 6 = 0$ et le point $B(3; 5)$.

1. Donner un vecteur normal à d.

Pour la droite d: $2x + y - 6 = 0$, un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

2. En déduire une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $d$passant par B.

Un vecteur directeur de $d$est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ (car $-b=-1$ et $a=2$).

Un vecteur normal à la perpendiculaire peut donc être $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

L'équation de la perpendiculaire est de la forme :

$$-1\times x+2\times y+c=0 \text{ soit } -x+2y+c=0.$$

Elle passe par $B(3;5)$:

$$-3+2\times 5+c=0\Rightarrow -3+10+c=0\Rightarrow c=-7.$$
$$-x+2y-7=0 \text{ ou } x-2y+7=0 \text{ (en multipliant par -1)}$$

3. Déterminer alors les coordonnées du point C, projeté orthogonal de B sur d.

C est l'intersection de d et de la perpendiculaire :

$$\begin{cases}2x+y-6=0\\-x+2y-7=0\end{cases}$$

Multiplions la deuxième équation par 2 :

$$-2x+4y-14=0$$

Ajoutons à la première équation :

$$(2x+y-6)+(-2x+4y-14)=0\Rightarrow 5y-20=0\Rightarrow y=4.$$

Reportons dans $2x+y-6=0$:

$$2x+4-6=0\Rightarrow 2x-2=0\Rightarrow x=1.$$
$$C(1;4)$$

4. Déterminer les coordonnées du point E, projeté orthogonal de B sur la droite d'équation $x=1$.

La droite $x=1$est verticale. Le projeté orthogonal d'un point sur une droite verticale conserve l'ordonnée. Ainsi,

$$E(1;5)$$

5. Montrer que Eest le projeté orthogonal du point Csur la droite (BE).

Calculons l'équation de (BE): $B(3;5)$ et $E(1;5)$ ont la même ordonnée, donc (BE) est la droite horizontale $y=5$.

Le projeté orthogonal d'un point sur une droite horizontale conserve l'abscisse. Le projeté de $C(1;4)$ sur $y=5$ est donc le point de coordonnées $(1;5)$, c'est-à-dire E.

Ainsi, Eest bien le projeté orthogonal de Csur (BE).

<u>Exercice n°7 :</u> On considère la droite dd'équation réduite $y=\frac{1}{3}x-2$ et le point $F(-1;5)$.

1. Donner un vecteur normal à d.

L'équation réduite $y=\frac{1}{3}x-2$s'écrit sous forme cartésienne :

$$-\frac{1}{3}x+y+2=0 \text{ou en multipliant par 3 : } -x+3y+6=0.$$

Un vecteur normal est donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ (ou $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$en multipliant par -1).

2. En déduire une équation réduite de la droite perpendiculaire à d passant par F.

Le coefficient directeur de $d$est $m = \frac{1}{3}$.

Le coefficient directeur m'de la perpendiculaire vérifie $m \times m' = -1$, donc

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

La perpendiculaire passe par $F(-1; 5)$, son équation réduite est :

$$y = m'(x+1) + 5 = -3(x+1) + 5 = -3x - 3 + 5 = -3x + 2.$$
$$y = -3x + 2$$

3. En déduire les coordonnées du point G, projeté orthogonal de F sur d.

G est l'intersection de $d$et de la perpendiculaire :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 2 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$$

En égalant :

$$\frac{1}{3}x - 2 = -3x + 2$$

Multiplions par 3 :

$$x - 6 = -9x + 6$$
$$x + 9x = 6 + 6$$
$$10x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

On reporte dans $y = -3x + 2$:

$$y = -3 \times \frac{6}{5} + 2 = -\frac{18}{5} + 2 = -\frac{18}{5} + \frac{10}{5} = -\frac{8}{5}$$

Ainsi, $G\left(\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}\right)$