Déterminer le sinus et le cosinus d'un réel

Exercice n°1 :

1. À l'aide de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, déterminer $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
2. À l'aide de la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice n°2 :

1. À l'aide de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
2. À l'aide de la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, déterminer $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Exercice n°3 : On donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1. À partir de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, déterminer $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ puis $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.
2. À partir de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, déterminer $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ puis $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Exercice n°4 : On donne

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

1. À partir de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, déterminer $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ puis $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
2. À partir de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, déterminer $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ puis $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
3. En déduire $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Correction

Exercice n°1 :

1. À l'aide de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, déterminer $\cos(\frac{2\pi}{3})$.

On remarque que $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$
Or, pour tout angle x, $\cos(\pi-x)=-\cos x$
Donc :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

2. À l'aide de la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, déterminer $\sin(\frac{\pi}{3})$.

On remarque que $\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$
Or, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
Donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice n°2 :

1. À l'aide de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, déterminer $\cos(\frac{\pi}{2})$.

On a $\frac{\pi}{2}=2\times\frac{\pi}{4}$
Avec $\cos(2x)=2\cos^2 x-1$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)-1=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=2\times\frac{2}{4}-1=2\times\frac{1}{2}-1=1-1=0$$

2. À l'aide de la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, déterminer $\sin(\frac{2\pi}{3})$.

On remarque que $\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$.
Or, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$.
Donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice n°3 : On donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ et }\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1. À partir de $\cos(\frac{\pi}{4})$, déterminer $\cos(-\frac{\pi}{4})$ puis $\cos(\frac{3\pi}{4})$.

a) Calcul de $\cos(-\frac{\pi}{4})$
La fonction cosinus est paire : pour tout angle x, $\cos(-x)=\cos x$.
Ainsi :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Calcul de $\cos(\frac{3\pi}{4})$

On remarque que $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$.

Or, pour tout angle x, $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

Donc :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

<u>Conclusion :</u> $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. À partir de $\sin(\frac{\pi}{4})$, déterminer $\sin(-\frac{\pi}{4})$ puis $\sin(\frac{3\pi}{4})$.

a) Calcul de $\sin(-\frac{\pi}{4})$

La fonction sinus est impaire : pour tout angle x, $\sin(-x) = -\sin x$.

Ainsi :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Calcul de $\sin(\frac{3\pi}{4})$

De même, $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$.

On utilise la relation : $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Donc :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

<u>Conclusion :</u> $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Exercice n°4 :</u> On donne

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

1. À partir de $\sin(\frac{\pi}{3})$, déterminer $\sin(\frac{2\pi}{3})$ puis $\sin(-\frac{\pi}{3})$.

Calcul de $\sin(\frac{2\pi}{3})$

On remarque que $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$.

La relation entre angles supplémentaires pour le sinus est : $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Ainsi :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calcul de $\sin(-\frac{\pi}{3})$

La fonction sinus est impaire : pour tout angle x, $\sin(-x) = -\sin x$.

Donc :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

<u>Conclusion :</u> $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$etsin $\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. À partir de $\cos(\frac{\pi}{3})$, déterminer $\cos(\frac{2\pi}{3})$ puis $\cos(-\frac{\pi}{3})$.

a) Calcul de $\cos(\frac{2\pi}{3})$

De même, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$.

La relation entre angles supplémentaires pour le cosinus est : $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

Ainsi :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

b) Calcul de $\cos(-\frac{\pi}{3})$

La fonction cosinus est paire : pour tout angle x, $\cos(-x) = \cos x$.

Donc :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

<u>Conclusion :</u> $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

3. En déduire $\cos(-\frac{2\pi}{3})$ et $\sin(-\frac{2\pi}{3})$.

a) Calcul de $\cos(-\frac{2\pi}{3})$

Le cosinus étant pair :

$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

b) Calcul de $\sin(-\frac{2\pi}{3})$

Le sinus étant impair :

$$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

<u>Conclusion :</u> $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$