Second degré

I] Résolution d'une équation du second degré :

Définition : On appelle **équation du second degré** toute équation pouvant se ramener à la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels tels que $a \neq 0$.

Exemple : L'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : Une **solution** de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a **pas de solution réelle**.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une **unique solution :** $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration : Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Donc, $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

car a est non nul.

- Si $\Delta < 0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple : Résoudre les équations suivantes.

Équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$	Équation : $x^2 - 2x + 1 = 0$	Équation : $x^2 + x + 1 = 0$
Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$ $= (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2$ $= 9 - 8$ $= 1$ $\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes. **Solutions :** $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$ **Ensemble des solutions :** $S = \{1; 2\}$	**Calcul du discriminant :** $\Delta = b^2 - 4ac$ $= (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$ $= 4 - 4$ $= 0$ $\Delta = 0$, donc l'équation admet une solution réelle double. **Solution :** $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ **Ensemble des solutions :** $S = \{1\}$	**Calcul du discriminant :** $\Delta = b^2 - 4ac$ $= 1^2 - 4 \times 1 \times 1$ $= 1 - 4$ $= -3$ $\Delta < 0$, donc l'équation n'admet **aucune solution réelle.** **Ensemble des solutions :** $S = \emptyset$

Propriété : **La somme S et le produit P** des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$

II] Factorisation d'un trinôme :

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $\mathbf{f(x) = a(x - x_0)^2}$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $\mathbf{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$.

Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Démonstration : Ecrivons $f(x) = ax^2 + bx + c$ sous sa forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Donc, $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a}$$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ car a est non nul.

Si $\Delta<0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2}<0\right)$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.

Si $\Delta=0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire :
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$
L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0=\frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta>0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ est équivalente à :

$x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$

$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}$ ou $x=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}$

$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple : Factoriser les trinômes suivants.

Équation : $2x^2-5x+3$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=(-5)^2-4\times2\times3\\&=25-24\\&=1\end{aligned}$$

$\Delta>0$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

Solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{5+1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Factorisation : $2x^2-5x+3=a(x-x_1)(x-x_2)$
$$=2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

Équation : $4x^2-12x+9$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=(-12)^2-4\times4\times9\\&=144-144\\&=0\end{aligned}$$

$\Delta=0$, donc l'équation admet une solution réelle double.

Solution :

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

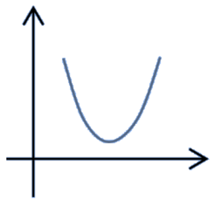
Factorisation : $4x^2-12x+9=a(x-x_0)^2$
$$=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

III] Signe d'un trinôme :

Théorème : Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a, sauf entre ses racines lorsqu'elles existent

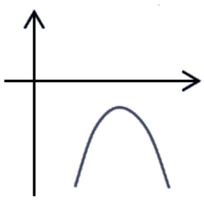
- **Si $\Delta < 0$:** f ne possède pas de racine. Donc f ne s'annule pas.

$a > 0$



x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	+	

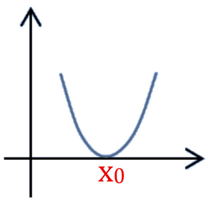
$a < 0$



x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	-	

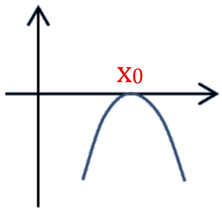
- **Si $\Delta = 0$:** f possède une unique racine x_0. Donc f s'annule en x_0.

$a > 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f(x)		+	0	+	

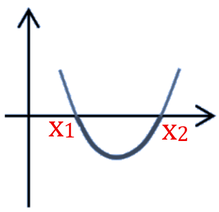
$a < 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f(x)		-	0	-	

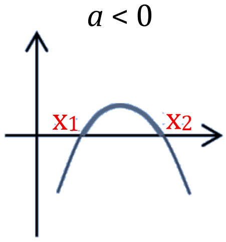
- **Si $\Delta > 0$:** f possède deux racines x_1 et x_2. Donc f s'annule en x_1 et x_2.

$a > 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	-	0	+	

$a < 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		-	0	+		-	

Remarque :
Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:
- Si $a > 0$, sa représentation graphique est une **parabole tournée vers le haut**.
- Si $a < 0$, sa représentation graphique est une **parabole tournée vers le bas**.

IV] Inéquations du second degré :

Définition : Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$.
Une inéquation du second degré à une inconnue x est une **inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes** : $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leqslant 0$.

Méthodologie : Résoudre une inéquation du 2nd degré.
Exemple : $x^2 + 2x - 4 \leq x + 2$

Etape n°1 : Rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

$$x^2 + 2x - 4 - x - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 \leq 0$$

Étape n°2 : Étudier le signe du trinôme $x^2 + x - 6$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$

Le discriminant est positif, donc le trinôme admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Étape n°3 : Dresser le tableau de signes.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x^2 + x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inéquation $x^2 + x - 6 \leq 0$ est vérifiée lorsque le trinôme est négatif ou nul, c'est-à-dire pour $x \in [-3; 2]$.

Étape n°4 : Conclusion.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 4 \leq x + 2$ est $[-3; 2]$.

V] Position relative de deux courbes :

Exemple : Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ et } g(x) = -x + 7.$$

Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

Méthodologie : Etudier la position relative des courbes C_f et C_g,

Etape n°1 : Examiner le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (x^2 - 4x + 3) - (-x + 7) \\ &= x^2 - 4x + 3 + x - 7 \\ &= x^2 - 3x - 4 \end{aligned}$$

Etape n°2 : Etudier le signe du trinôme $x^2 - 3x - 4$.
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25.$

Le discriminant est positif, donc le trinôme admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2} = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{3+\sqrt{25}}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Etape n°3 : Dresser le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $f(x) - g(x) > 0$ sur $]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[\Rightarrow C_f$ est au-dessus de C_g.

$f(x) - g(x) < 0$ sur $]-1; 4[\Rightarrow C_f$ est en dessous de C_g.

$f(x) - g(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 4 \Rightarrow C_f$ et C_g se coupent aux points d'abscisses -1 et 4.

Etape n°4 : Conclusion.

- Sur $]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$, la courbe C_f est au-dessus de C_g.
- Sur $]-1; 4[$, la courbe C_f est en dessous de C_g.
- Les courbes se coupent aux points d'abscisses -1 et 4.