Second degré

I] Fonction polynôme de degré 2 :

1- Forme développée :

Définition : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que f est une **fonction polynôme du second degré**, ou **fonction trinôme du second degré**, si et seulement si, il existe trois réels a, b et c, avec $a \neq 0$, tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Cette forme est appelée la **forme développée** de f (x).

Exemples :
$f(x) = 4x^2 + 2x - 2$.
$g(x) = 3(5 - 2x)(x - 1)$. (polynôme du 2e degré, mais pas sous forme développée.)
$h(x) = 3x^2 + 1$.

Contre-exemples :
$f(x) = 5x + 2$ (Fonction polynôme du premier degré, ou fonction affine)
$g(x) = 7x^3$ (Fonction polynôme du troisième degré)
$h(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$ (Fonction rationnelle)

2- Forme factorisée :

Définition : Soit P un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$.
On appelle **racine (ou zéro) de P(x)** tout nombre réel x_0 tel que $P(x_0) = 0$.

Vocabulaire : Autrement dit, x_0 est une racine de P, si et seulement si, x_0 est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

Exemple : Soit $P(x) = 2x^2 - 2x - 4$. Calculer P(2) et conclure.
$P(2) = 2 \times 2^2 - 2 \times 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$
Donc : 2 est une racine de P(x)

Définition : Soit P(x) un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
S'il admet deux racines réelles x_1 et x_2 (éventuellement égales), alors on peut l'écrire sous la forme :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

qu'on appelle **forme factorisée de P**.

3- Somme et produit des racines :

Théorème : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Si P(x) admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales), alors on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration :
Si x_1 et x_2 sont les racines de P (x), alors pour tout réel x, on a $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Donc $P(x) = a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$.
Or pour tout réel x, on a aussi $P(x) = ax^2 + bx + c$.

La forme développée d'un polynôme étant unique, par identification, on a donc :
$b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$.
Soit $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ $(a \neq 0)$

4- Forme canonique :

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$. Alors pour tout réel x, il existe deux réels α et β tels que,

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Cette écriture est appelée la **forme canonique** de f

Démonstration : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a(x - \alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Exemple : Déterminons la forme canonique de $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

$$\begin{aligned} \forall x \in R,\ 3x^2 + 6x + 1 &= 3(x^2 + 2x) + 1 \\ &= 3\,[(x + 1)^2 - 1] + 1 \\ &= 3(x + 1)^2 - 3 + 1 \\ &= 3(x + 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

La forme canonique est donc : $f(x) = 3(x + 1)^2 - 2$.

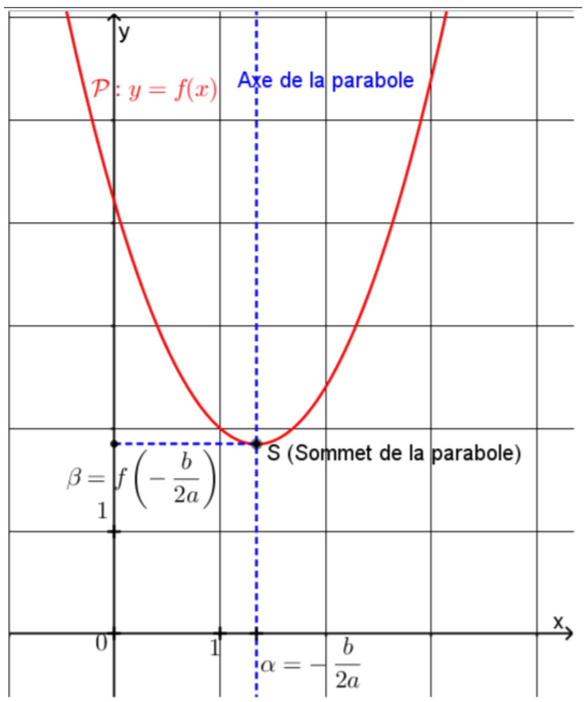
5- Variations et représentation graphique :

Propriété : Soit f une fonction polynôme du second degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec a, α et β des réels et $a \neq 0$.

a > 0

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↘	$\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

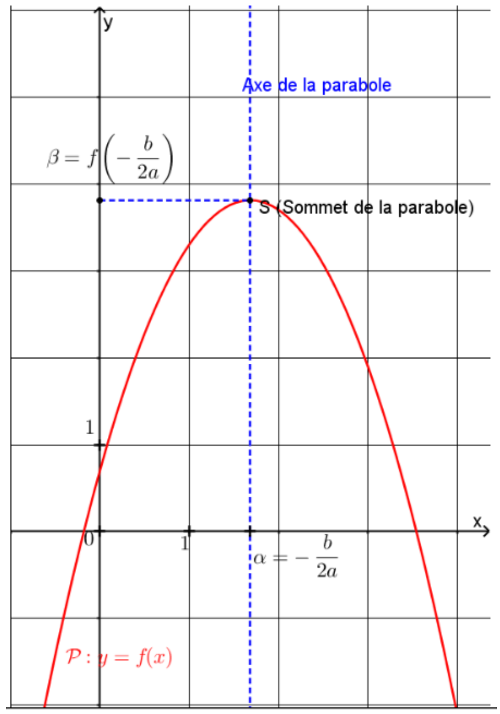
f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\alpha]$,
strictement croissante sur $[\alpha\ ;+\infty[$
et f admet comme minimum β en α.



a < 0

x	$-\infty$	$\alpha = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↗	$\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘

f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\alpha]$,
strictement décroissante sur $[\alpha\ ;+\infty[$
et f admet comme maximum β en α.



Définition : La représentation graphique d'une fonction polynôme f du second degré s'appelle une **parabole**.
Le point de coordonnées **$(\alpha\ ;\beta)$** s'appelle le **sommet** de la parabole.
Il correspond à **l'extremum** de la fonction f.

Propriété : La parabole admet pour **axe de symétrie** la droite d'équation **$x = \alpha$**.

Exemple : On considère la fonction P définie sur R par $P(x) = 3x^2 - 6x + 2$.
1) Mettre P(x) sous forme canonique.
La fonction P est un polynôme du second degré, on pose a = 3, b = – 6 et c = 2.

Calculons $\alpha = -\frac{b}{2a}$: $\qquad \alpha = -\frac{-6}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$

Calculons $\beta = P(\alpha)$: $\qquad \beta = P(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 2 = 3 - 6 + 2 = -1$

La forme canonique est : $P(x) = 3(x-1)^2 - 1$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction P.

$a = 3 > 0$, donc la parabole est orientée vers le haut. La fonction est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	